Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES DOMAINES VECTORIELS ET LA THÉORIE DES CORPS CONVEXES

Autor: Vincensini, M. Paul

Kapitel: I. – DOMAINES VECTORIELS.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28028

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LES DOMAINES VECTORIELS ET LA THÉORIE DES CORPS CONVEXES

PAR

M. Paul VINCENSINI (Marseille).

I. — DOMAINES VECTORIELS.

On sait qu'on appelle domaine vectoriel d'un corps convexe C de l'espace euclidien E_n à n dimensions, le domaine V rempli par les extrémités des vecteurs issus d'un point fixe O et équipollents aux différents vecteurs ayant pour origines et pour extrémités deux points quelconques de C [1].

V est convexe et admet le point O pour centre de symétrie. J'ai indiqué [2] une démonstration géométrique générale de la convexité de V, en me basant sur la génération suivante du domaine vectoriel d'un corps convexe quelconque C.

Déplaçons C par les différentes translations qui amènent un point quelconque de sa frontière à passer par le point fixe O. Nous obtenons ainsi un ensemble de ∞^{n-1} corps convexes congruents à C. La région de l'espace remplie par ces ∞^{n-1} corps est précisément V.

Les corps convexes que nous envisagerons dans la suite seront supposés doués, en chaque point frontière, d'un hyperplan tangent déterminé, variant continuement avec le point de

---

[1] Pour la notion de domaine vectoriel et quelques-unes de ses applications, voir: RADEMACHER: *Jahresbericht der D.M.V.*, t. XXXIV, 1925, p. 64. T. ESTERMANN: Sur le domaine vectoriel d'un corps convexe, *Math. Zeitschrift*, t. 28, 1928. GANAPATHI: Sur les domaines vectoriels, *Math. Zeitschrift*, t. 38, 1934.

[2] P. VINCENSINI: Sur les domaines vectoriels des corps convexes, *Journal de Math. pures et appliquées* t. XV, 1936.

contact. Autrement dit, il y aura une correspondance biunivoque et bicontinue, entre l'hypersurface frontière du corps et sa représentation hypersphérique. Dans ces conditions, chacun des ∞^{n-1} corps précédemment définis touche la frontière de V en un certain point, et les hyperplans tangents à un même corps, en O et au point A où il touche la frontière de V, sont *parallèles*.

Il résulte immédiatement de là que, si deux corps convexes C et C′ ont même domaine vectoriel, deux diamètres parallèles quelconques des deux corps *sont égaux et font le même angle avec les hyperplans tangents en leurs extrémités* [1].

On peut en effet, par des translations, amener les deux diamètres parallèles envisagés à coïncider avec un même rayon vecteur OA du domaine vectoriel.

Il est clair d'ailleurs que deux corps convexes de même domaine vectoriel ont même largeur [2] dans toutes les directions.

On peut dire si l'on veut que, C et C′ étant deux corps convexes ayant même domaine vectoriel, si π et π' sont deux hyperplans tangents parallèles et également situés touchant respectivement C et C′ en A et A′, la translation $\overrightarrow{AA'}$ amène les frontières des deux corps à être bitangentes en deux points diamétralement opposés.

L'hypersurface frontière de chacun des deux corps peut donc être regardée comme l'enveloppe complète de l'hypersurface frontière de l'autre, lorsque celle-ci se déplace par translation en restant constamment tangente à la première hypersurface.

Eu égard aux corps convexes du plan, il convient d'ajouter les propriétés suivantes. Soient M et M′ deux points diamétralement opposés d'un corps convexe C (du contour qui le limite), A le point correspondant du domaine vectoriel V [$\overrightarrow{OA}$ est équipollent à $\overrightarrow{M'M}$]. Lorsque les tangentes T et T′ à C en M et M′ tournent d'un angle $d\alpha$, M et M′ décrivent deux arcs ds et ds'. La tangente en A à V tourne du même angle $d\alpha$, et le point A décrit l'arc $d\sigma$ tel que

$$d\sigma = ds + ds' .$$

---

[1] Nous appelons *diamètre* d'un corps convexe, le segment déterminé par les points de contact de sa frontière avec deux hyperplans tangents parallèles.

[2] Une *largeur* d'un corps convexe est la distance de deux hyperplans tangents parallèles.

Il résulte de là que

1° la longueur de V est le double de celle de C;
2° le rayon de courbure de V en A est la somme des rayons de courbure de C en M et M'.

On déduit immédiatement de la deuxième propriété que si deux corps convexes plans ont même domaine vectoriel, et si leurs frontières ont même rayon de courbure en deux points (respectivement situés sur les deux frontières) où les tangentes sont parallèles, ces frontières *ont aussi même rayon de courbure aux points diamétralement opposés des précédents.*

Les courbes *orbiformes* [de largeur constante] limitent des corps convexes admettant des cercles pour domaines vectoriels. Toutes les orbiformes de même largeur d ont même longueur πd [la moitié de la longueur du domaine vectoriel commun]. En outre, une orbiforme et un cercle de même largeur peuvent toujours être amenés, d'une infinité de façons, à être bitangents en deux points diamétralement opposés.

II. — Les domaines vectoriels et la théorie des corps convexes.

Indépendamment de son intérêt propre, dû surtout à l'existence de relations extrémales fort remarquables établies par MM. Rademacher, Estermann et Ganapathi *(articles cités)* entre les volumes d'un corps convexe quelconque et de son domaine vectoriel, la notion de domaine vectoriel d'un corps convexe se prête à une étude remarquablement intuitive de nombreuses questions relatives aux corps convexes.

On sait à quelles difficultés on se heurte lorsqu'on essaye d'aborder, par l'analyse, les problèmes même les plus simples qui se présentent dans la théorie des corps convexes. Ces difficultés sont dans l'ordre logique des choses.

Il est incontestable que, depuis que Gauss a systématiquement employé les coordonnées curvilignes pour l'étude des propriétés des surfaces, créant ainsi la géométrie différentielle, des progrès considérables ont été réalisés en matière géomé-