III. — Les résultats de M. Segre.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Récemment [Mémoire cité du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*], j'ai appliqué la notion de domaine vectoriel à la détermination des figures convexes dont la largeur *est donnée dans toute direction*. La construction à laquelle j'ai été conduit, remarquablement simple, donne en particulier les orbiformes si la largeur est supposée constante; en outre, elle s'étend tout naturellement à l'espace.

Dans deux Notes publiées dans les *Rendiconti dei Lincei* [1], M. B. SEGRE a énoncé un grand nombre de propriétés des arcs convexes, des ovales et des orbiformes du plan. Les résultats de M. Segre ont attiré l'attention de M. HADAMARD, qui a bien voulu me charger de les exposer dans une séance de son séminaire du Collège de France. Ignorant les démonstrations de M. Segre, j'ai cherché à établir ses propositions en les rattachant, autant que possible, à la notion de domaine vectoriel.

Il se trouve que quelques-unes en sont des conséquences presque immédiates, beaucoup d'autres s'y ramenant avec la plus grande facilité.

Pour illustrer par quelques nouveaux exemples la fécondité de la notion de domaine vectoriel, je vais reprendre, à ce nouveau point de vue, quelques-uns des résultats de M. B. Segre.

III. — LES RÉSULTATS DE M. SEGRE.

Les résultats de M. B. Segre sont, en grande partie, relatifs à la courbure des courbes convexes du plan. Les courbes considérées sont des courbes *intuitives* au sens de M. SEVERI, c'est-à-dire, tout entières situées à distance finie et douées, en chaque point, d'une tangente variant d'une façon continue et d'une courbure également continue et non nulle. Une ligne ouverte sera dite *un arc;* l'arc sera convexe lorsque, avec sa corde, il détermine une surface convexe.

Lorsqu'un point parcourt un arc dans un certain sens, la tangente correspondante tourne d'un certain angle que M. B. Segre, avec M. MUKOPADYAYA [2], appelle la *déflexion* de l'arc.

---

[1] 6me série, t. 20, 1934.
[2] *Collected geometrical papers of Calcutta*, 1931.

Si la déflexion est égale à π les tangentes aux extrémités de l'arc sont parallèles. Pour une courbe convexe fermée (un ovale), la déflexion est égale à 2π. Si les tangentes aux extrémités d'un arc se coupent, la déflexion est inférieure à π ou supérieure à π, suivant que l'arc est tout entier à l'intérieur ou tout entier à l'extérieur du triangle formé par les deux tangentes et la corde.

La plupart des propositions énoncées par M. Segre découlent plus ou moins directement du théorème fondamental suivant:

Considérons deux arcs convexes distincts C et C′ dont les déflexions sont inférieures ou égales à π, ayant les mêmes extrémités et tangents en au moins une extrémité. Il est clair que l'on peut établir entre ces deux arcs (ou entre l'un d'eux et une portion convenable de l'autre) une correspondance biunivoque par tangentes parallèles. *Dans cette correspondance, la différence des courbures en deux points homologues de* C *et* C′ *prend des valeurs positives et des valeurs négatives ; il y a, par suite, sur les deux arcs, un couple (au moins) de points homologues distincts des extrémités, en lesquels les courbures sont égales.*

Le théorème précédent peut être présenté sous la forme légèrement différente suivante, qui nous sera plus commode dans la suite.

Soit un triangle quelconque ABC [C peut être à l'infini] et deux arcs de courbes convexes $\overset{\frown}{BM}$, $\overset{\frown}{BN}$ tangents en B au côté AB, situés à l'intérieur du triangle, et tels que les tangentes aux points M et N où ils aboutissent sur AC soient parallèles. *Si l'on établit une correspondance par tangentes parallèles entre les points des deux arcs, la différence des courbures en deux points correspondants quelconques prend des valeurs positives et des valeurs négatives, et il existe au moins un couple de points correspondants en lesquels les courbures sont égales.*

Le fait que la différence des courbures en deux points homologues ne peut pas prendre de valeurs d'un signe déterminé signifie, dans cet énoncé comme dans le précédent, *que les deux arcs coïncident.*

Parmi les résultats de M. Segre, reprenons plus spécialement le suivant, relatif aux ovales, pour montrer comment la notion de domaine vectoriel peut intervenir utilement dans la démonstration.

Soient, C *un ovale quelconque différent d'un orbiforme,* s *le minimum de la somme des rayons de courbure en deux points diamétralement opposés,* S *le maximum de cette somme,* d *et* D *les largeurs minima et maxima de* C, l *la longueur de* C. On a

$$s < d < \frac{l}{\pi} < D < S \,. \tag{1}$$

Substituons à l'ovale envisagé son domaine vectoriel dont la frontière V est un ovale doué d'un centre de symétrie O. Les largeurs minimum et maximum de C correspondent aux rayons vecteurs minimum et maximum $OA = d$ et $OB = D$ de V [fig. 1].

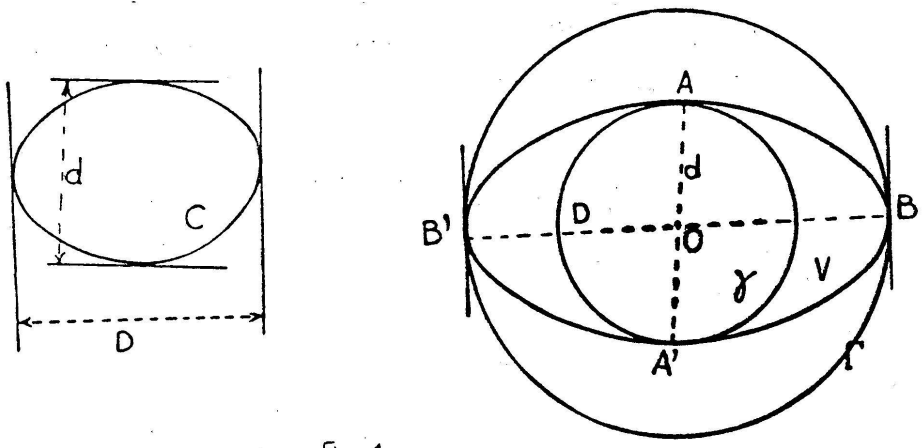

Fig 1.

Les diamètres AA′ et BB′ de V sont normaux à V, et les cercles γ et Γ de diamètres AA′, BB′ sont respectivement le plus grand cercle inscrit dans V et le plus petit cercle circonscrit à V.

Le minimum s et le maximum S de la somme des rayons de courbure en deux points diamétralement opposés de C sont, d'après le numéro I, respectivement le minimum et le maximum du rayon de courbure de V.

Considérons les deux arcs de V et γ situés d'un côté déterminé de AA′; d'après la proposition de M. Segre rappelée plus haut, il existe sur ces deux arcs deux points (au moins) où les tangentes sont parallèles et où les rayons de courbure sont égaux; il existe donc un point au moins sur V en lequel le rayon de courbure est égal à d.

La différence des rayons de courbure en deux points homologues de V et de γ prenant, comme l'on sait, des valeurs positives et négatives, le minimum du rayon de courbure de V est inférieur à d. On a donc

$$s < d \ .$$

Le même raisonnement appliqué à V et Γ donne

$$\mathrm{D} < \mathrm{S} \ .$$

Il reste à montrer que

$$d < \frac{l}{\pi} < \mathrm{D} \ .$$

Il suffit pour cela de regarder la figure (1). Γ enveloppe V qui, à son tour, enveloppe Γ. On peut donc écrire

$$\frac{1}{2} \text{ long. de } \gamma < \frac{1}{2} \text{ long. de V} < \frac{1}{2} \text{ long. de } \Gamma \ ,$$

d'où immédiatement

$$d < \frac{l}{\pi} < \mathrm{D} \ .$$

La suite des inégalités (1) donne des propriétés extrémales caractéristiques des orbiformes. Pour qu'un ovale soit orbiforme, *il faut et il suffit que deux quelconques des cinq quantités figurant dans* (1) *soient égales.*

Le caractère de nécessité de la proposition est immédiat. Si C est une orbiforme, dans la figure (1) C, γ et Γ sont confondus, d'où l'égalité des cinq quantités figurant dans les inégalités (1). Montrons que la condition énoncée est suffisante.

Si $d = \mathrm{D}$, la largeur de C est constante et C est bien une orbiforme.

Si $d = \frac{l}{\pi}$, les deux ovales V et γ ont même longueur; or V enveloppe γ, donc V et γ sont identiques. Le domaine vectoriel V de C étant un cercle, C est une orbiforme. Le même raisonnement s'applique si $\mathrm{D} = \frac{l}{\pi}$.

Si $s = d$, la différence des rayons de courbure de V et γ en

deux points homologues ne peut pas prendre de valeurs négatives; il résulte alors d'une remarque antérieure que V et γ sont identiques. V étant un cercle, C est une orbiforme. Le raisonnement est identique si D = S.

IV. — La correspondance équilongue.

Considérons deux ovales quelconques C et C′; on peut toujours, d'une infinité de façons, établir entre les deux ovales une correspondance ponctuelle conservant les déflexions. Il suffit, à cet effet, de prendre arbitrairement deux points A et A′ sur C et C′ dont les tangentes font un certain angle α, puis d'associer les couples de points M et M′ de C et C′ tels que les déflexions des arcs $\widehat{AM}$, $\widehat{A'M'}$ soient constamment égales. M et M′ peuvent décrire C et C′ en tournant dans le même sens ou dans des sens inverses; nous nous bornerons à envisager le premier cas. Il est clair que, sur C et C′, les couples de points diamétralement opposés se correspondent.

La correspondance établie par M et M′ sur C et C′ est dite par M. B. Segre *équilongue* si la distance de deux tangentes parallèles de C est constamment égale à la distance des deux tangentes homologues de C′. M. Segre justifie sa définition en montrant que, lorsqu'il en est ainsi, C et C′ ont même longueur. Cette propriété devient immédiate si l'on fait tourner C de l'angle $-\alpha$; après la rotation, C et C′ (qui se correspondent par tangentes parallèles) ont même largeur dans toutes les directions, donc même domaine vectoriel et par suite même longueur (moitié de la longueur du domaine vectoriel).

Il se trouve que la plupart des propriétés des ovales que M. Segre a rattachées aux correspondances équilongues, peuvent être très simplement obtenues par la rotation d'angle $-\alpha$ effectuée sur C, suivie de la considération du domaine vectoriel commun de C et C′. Considérons par exemple la proposition suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une correspondance conservant les déflexions, entre deux ovales C *et* C′, *soit équilongue,*