**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 36 (1937)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES TRANSFORMATIONS CIRGULAIRES RÉELLES DU PLAN
**Autor:** Guilhem, R. Saint
**Kapitel:** Chapitre I. — Définitions et théorèmes généraux.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-28031

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 15.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

translation; d'une figure à une autre inversement égale, par un *retournement*, qui se réduit à une symétrie autour d'une droite, suivie d'une translation parallèle à cette droite.

## Chapitre I. — Définitions et théorèmes généraux.

§ **2.** — *Définition. — Une transformation ponctuelle réelle, biunivoque, et continue, du plan sera dite* circulaire *si elle transforme un cercle quelconque en un autre cercle.* Dans cette définition le mot « cercle » désigne une circonférence proprement dite ou une droite.

Exemple: une inversion, un produit d'inversions et de similitudes.

*Les transformations circulaires du plan forment un groupe.* Evident.

Théorème I. — *Si une transformation circulaire* $\Gamma$ *est définie pour tous les points du plan euclidien, elle se réduit à une similitude.*

Soit en effet $A'$ le transformé d'un point quelconque $A$; $D_1'$ et $D_2'$ deux droites passant par $A'$. Les cercles $D_1$ et $D_2$ qui ont $D_1'$ et $D_2'$ pour homologues se coupent en $A$ et en un autre point $\overline{A}$, qui ne peut avoir d'homologue $\overline{A'}$, car ce point $\overline{A'}$ devrait être commun à $D_1'$ et $D_2'$, tout en étant distinct de $A'$. Donc $D_1$ et $D_2$ sont nécessairement des droites.

Par suite, les droites de la figure $F'$ sont les transformées des droites de $F$; $\Gamma$ est donc une homographie. Comme elle transforme les cercles en cercles, c'est une similitude.

*Corollaire. — Si* $\Gamma$ *ne se réduit pas à une similitude, il existe au moins un point* $\Phi$ *du plan pour lequel elle n'est pas définie.*

Le raisonnement qui précède montre que les cercles passant par un tel point $\Phi$ sont transformés en droites. Nous allons montrer qu'il n'existe qu'un point $\Phi$, c'est-à-dire que:

Théorème II. — *Une transformation circulaire proprement dite* $\Gamma$ *étant donnée, il existe dans le plan un point* $\Phi$ *et un seul tel que tous les cercles passant par* $\Phi$ *soient transformés en droites.*

En effet, s'il existait deux points singuliers de ce genre $\Phi_1$ et $\Phi_2$, on pourrait prendre des couples de cercles $C_1$ et $C_2$ passant

respectivement par $\Phi_1$ et $\Phi_2$, se coupant en A et B. $\Gamma$ serait définie pour A et B, et transformerait $(C_1)$ et $(C_2)$ en deux droites $(C_1')$ et $(C_2')$ qui devraient se couper en deux points distincts A′ et B′, ce qui est absurde. Il existe donc un point $\Phi$ et un seul.

Le point $\Phi$ sera dit *foyer-objet* de la transformation $\Gamma$.

THÉORÈME III. — *Il existe dans le plan un point $\Psi$ et un seul tel que les cercles transformés de toutes les droites du plan passent par $\Psi$.*

Le point $\Psi$ sera le *foyer-image de* $\Gamma$.

Ce théorème se démontre d'une manière analogue au théorème II. Ou encore, il résulte de l'application du théorème II à la transformation $\Gamma^{-1}$ inverse de $\Gamma$. Il résulte aussi des propriétés que nous allons donner maintenant et qui découlent elles-mêmes, si l'on veut, du seul théorème II.

§ **3.** — THÉORÈME IV. — *Toute transformation circulaire proprement dite $\Gamma$ est le produit d'une inversion par une égalité* (déplacement ou retournement).

Soit en effet I une inversion de pôle $\Phi$ et de puissance arbitraire. Soit F la figure primitive, F′ la transformée par $\Gamma$, $F_0$ par I. On passe de $F_0$ à F′ par une transformation circulaire, produit de I par $\Gamma$, qui se réduit à une similitude $\Sigma$, car les droites de F′ correspondent aux cercles de F passant par $\Phi$, et de même les droites de $F_0$.

Donc $F' = F_0 \cdot \Sigma$ et $\Gamma = I\Sigma$

En choisissant convenablement la puissance de l'inversion I, on a

$$\boxed{\Gamma = I\Delta} \tag{1}$$

$\Delta$ étant soit un déplacement $\mathcal{D}$, soit un retournement D.

*Corollaire.* — Les transformations $\Gamma$ conservent les angles (en grandeur).

Elles se divisent en deux classes: la première, celle des *transformations circulaires directes*

$$\boxed{\mathcal{C} = ID}\ , \tag{2}$$

où D est un retournement, conserve les angles en grandeur et en signe. La deuxième conserve les angles en grandeur, mais change leur signe: c'est celle des *transformations circulaires inverses:*

$$\boxed{C = I\mathcal{D}}\ , \qquad (3)$$

où $\mathcal{D}$ est un déplacement.

Chacune de ces deux familles est à 6 paramètres: 3 pour l'inversion, 3 pour le déplacement ou le retournement.

Les $\mathcal{C}$ forment un groupe; les C non.

*Point à l'infini du plan.* — C'est un point impropre $\infty$ défini comme étant commun à toutes les droites du plan. Une droite est un cercle qui passe par $\infty$. Une transformation $\Gamma$ transforme son foyer-objet $\Phi$ en $\infty$, et transforme $\infty$ en son foyer-image $\Psi$. Elle est donc *définie et biunivoque pour tous les points du plan ainsi étendu par l'adjonction du point impropre* $\infty$.

## Chapitre II. — Groupe des transformations circulaires directes.

§ 4. — La transformation générale $\mathcal{C} = ID$ est définie par un cercle (I) de centre $\Phi$ (cercle d'inversion) et un vecteur $\vec{D}$ de retournement. Le foyer image $\Psi$ est le transformé de $\Phi$ par le retournement D. Les éléments géométriques conservés dans l'inversion I subissent simplement le retournement: tel est le cas du cercle (I) et des cercles orthogonaux à celui-là, en particulier des droites passant par $\Phi$, qui sont *les seules droites du plan transformées en droites par* $\mathcal{C}$.

Soit P le point où une droite (L) passant par $\Phi$ coupe son homologue (L′) (qui passe naturellement par $\Psi$) (fig. 1); quand (L) tourne autour de $\Phi$, P décrit une hyperbole équilatère (H) passant par $\Phi$ et $\Psi$, et admettant comme asymptotes la droite (D) et la perpendiculaire ($\Delta$) menée à (D) au milieu O de $\Phi\Psi$. (L) et (L′) découpent sur (D) et ($\Delta$) deux segments constants

$$\overrightarrow{dd'} = \vec{D}\ , \qquad \overrightarrow{\delta\delta'} = \overrightarrow{\Phi\varphi}\ .$$