Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES TRANSFORMATIONS CIRGULAIRES RÉELLES DU PLAN
Autor: Guilhem, R. Saint
Kapitel: Chapitre II. — Groupe des transformations circulaires directes.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28031

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

où D est un retournement, conserve les angles en grandeur et en signe. La deuxième conserve les angles en grandeur, mais change leur signe: c'est celle des *transformations circulaires inverses:*

$$\boxed{C = I\mathcal{D}}\ , \qquad (3)$$

où $\mathcal{D}$ est un déplacement.

Chacune de ces deux familles est à 6 paramètres: 3 pour l'inversion, 3 pour le déplacement ou le retournement.

Les $\mathcal{C}$ forment un groupe; les C non.

Point à l'infini du plan. — C'est un point impropre ∞ défini comme étant commun à toutes les droites du plan. Une droite est un cercle qui passe par ∞. Une transformation Γ transforme son foyer-objet Φ en ∞, et transforme ∞ en son foyer-image Ψ. Elle est donc *définie et biunivoque pour tous les points du plan ainsi étendu par l'adjonction du point impropre* ∞.

Chapitre II. — Groupe des transformations circulaires directes.

§ 4. — La transformation générale $\mathcal{C} = ID$ est définie par un cercle (I) de centre Φ (cercle d'inversion) et un vecteur $\vec{D}$ de retournement. Le foyer image Ψ est le transformé de Φ par le retournement D. Les éléments géométriques conservés dans l'inversion I subissent simplement le retournement: tel est le cas du cercle (I) et des cercles orthogonaux à celui-là, en particulier des droites passant par Φ, qui sont *les seules droites du plan transformées en droites par* $\mathcal{C}$.

Soit P le point où une droite (L) passant par Φ coupe son homologue (L′) (qui passe naturellement par Ψ) (fig. 1); quand (L) tourne autour de Φ, P décrit une hyperbole équilatère (H) passant par Φ et Ψ, et admettant comme asymptotes la droite (D) et la perpendiculaire (Δ) menée à (D) au milieu O de $\Phi\Psi$. (L) et (L′) découpent sur (D) et (Δ) deux segments constants

$$\overrightarrow{dd'} = \vec{D}\ , \qquad \overrightarrow{\delta\delta'} = \overrightarrow{\Phi\varphi}\ .$$

On pourrait donc définir une transformation $\mathcal{C}$ en se donnant une hyperbole équilatère (H) et un point Φ sur l'une de ses branches. L'homologue M′ de M se construit alors en joignant

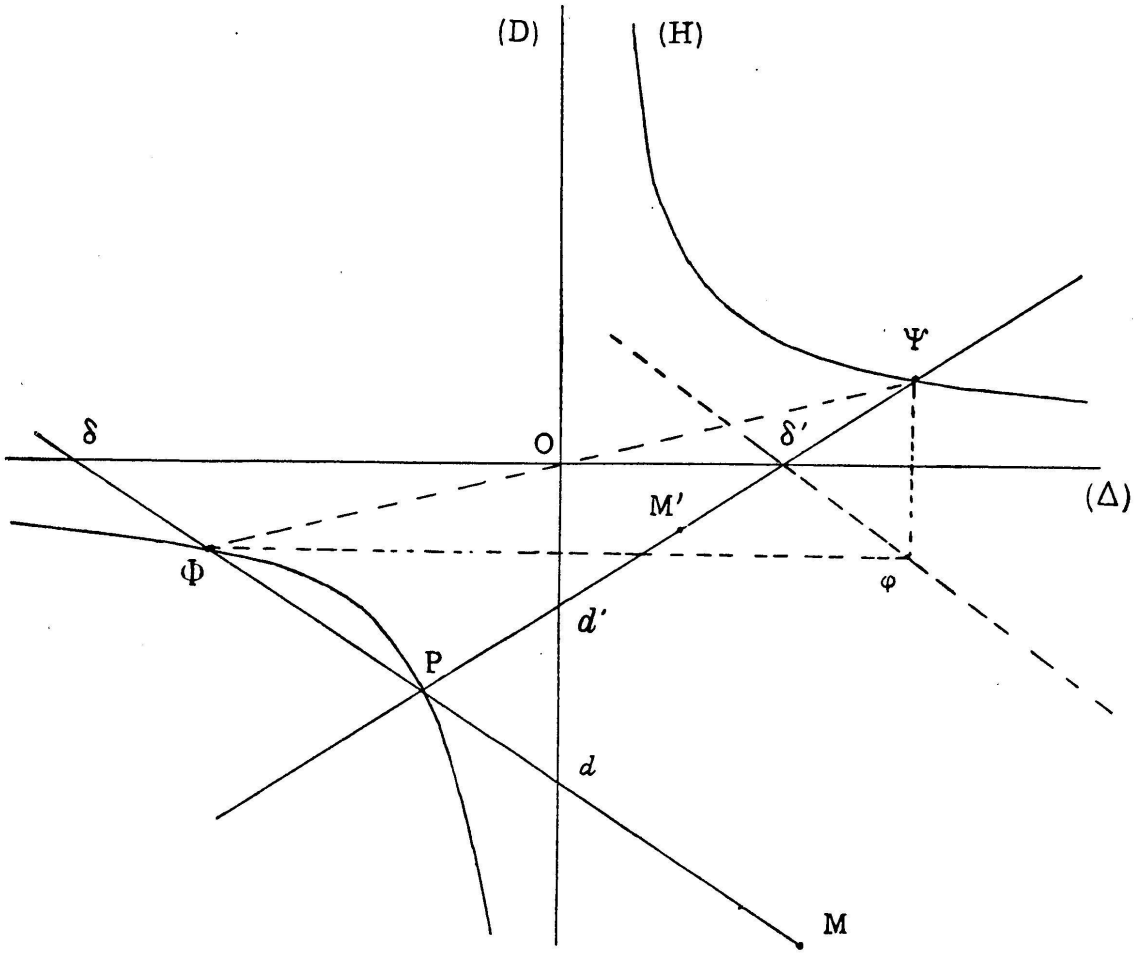

Fig. 1.

ΦM qui coupe (H) en P, puis en portant sur ΨP un segment $\Psi M'$ tel que

$$\Phi M \cdot \Psi M' = R^2 \tag{4}$$

R étant une constante arbitraire (c'est-à-dire indépendante de (H) et de Φ).

On pourrait, dès à présent, étudier les différentes classes de $\mathcal{C}$ à partir des remarques précédentes. Mais la méthode suivante mène plus directement au résultat.

§ **5.** — Théorème V. — *La transformation $\mathcal{C}$ admet deux points doubles toujours réels. Ils sont diamétralement opposés sur l'hyperbole équilatère* (H), *c'est-à-dire qu'ils forment avec les deux*

foyers un parallélogramme, dit parallélogramme de base de la transformation $\mathcal{C}$.

Démonstration: Soit ω un point double de $\mathcal{C}$; d'après ce qui précède, ω est sur (H) et vérifie la condition $\Phi\omega.\Psi\omega = R^2$.

Inversement tout point vérifiant ces deux conditions est point double de $\mathcal{C}$. Il en résulte que si ω est point double, il en est de même de son symétrique ϖ par rapport au point O.

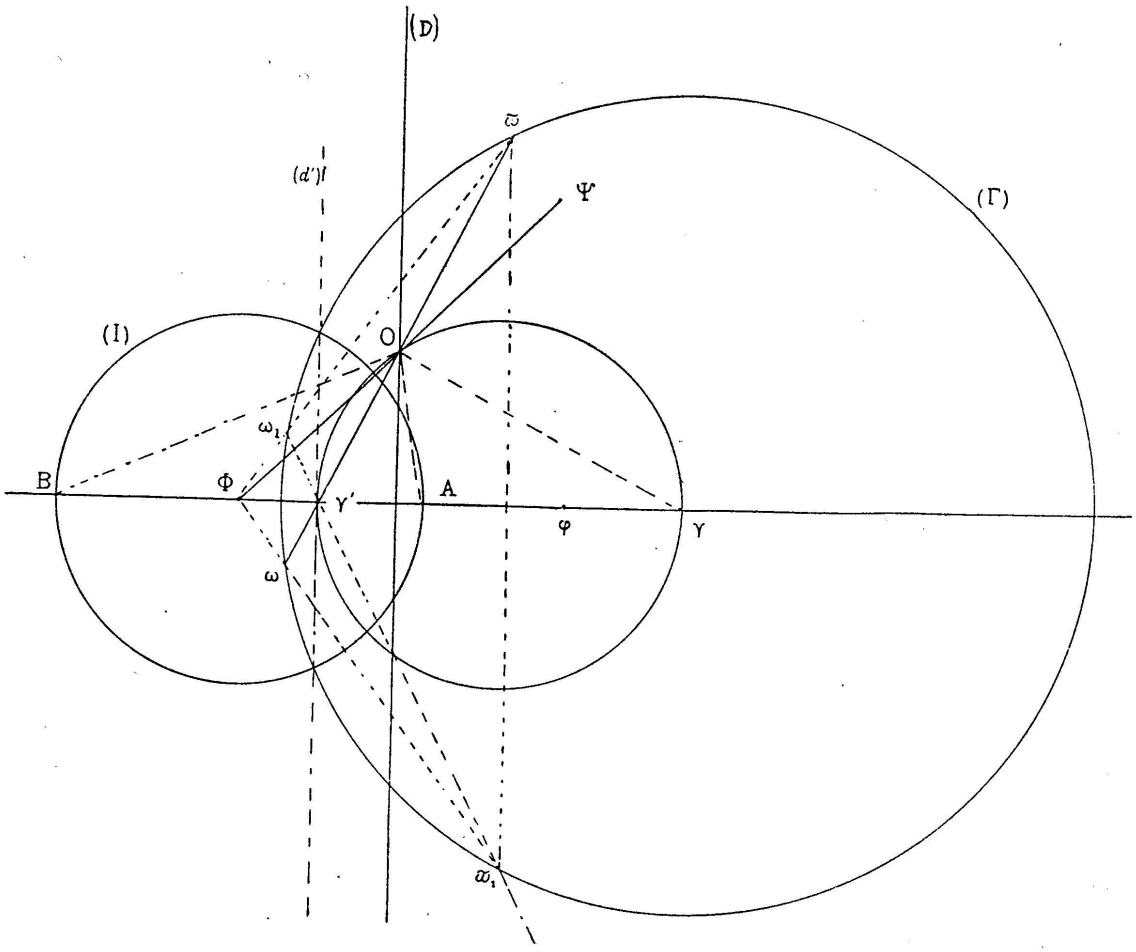

Fig. 2.

a) *Cas général.* — Supposons que (H) soit une hyperbole non décomposée, c'est-à-dire que Φ ne soit ni sur (D) ni sur (Δ); cela revient à dire que D ne passe pas par Φ, et que le segment $\overrightarrow{D}$ n'est pas nul, en un mot que *le moment du vecteur* $\overrightarrow{D}$ *par rapport à* Φ *n'est pas nul* (fig. 2).

Le symétrique ω_1 de ω par rapport à $\Phi\varphi$ est sur $\Phi\varpi$ et l'on a $\Phi\omega_1.\Phi\varpi = R^2$. Le cercle ($\Gamma$) passant par $\omega\omega_1\varpi$ est donc orthogonal à (I); son centre γ est sur $\Phi\varphi$ et sur la médiatrice de $\omega\varpi$.

Par ailleurs $\omega\varpi$ coupe $\Phi\varphi$ en γ' qui est aussi sur $\omega_1\varpi_1$, symé-

trique de $\omega\varpi$ par rapport à $\Phi\varphi$; donc la perpendiculaire (d') en γ' à $\Phi\varphi$ est la polaire de Φ par rapport au cercle (Γ); comme les cercles (I) et (Γ) sont orthogonaux, (d') est leur sécante commune. Il en résulte que $\Phi\gamma . \Phi\gamma' = R^2$; le cercle de diamètre $\gamma\gamma'$, qui passe par O, est orthogonal à (I); $O\gamma$ et $O\gamma'$ sont les bissectrices de OA et OB (puisque γ et γ' sont conjugués harmoniques par rapport à A et B). On en déduit la construction suivante:

$\mathcal{C}$ étant définie par le cercle (I) et le vecteur $\vec{D}$, construire Ψ et O, puis les bissectrices de OA et OB, coupant la droite $\Phi\varphi$ (perpendiculaire à D) en deux points: l'un extérieur au cercle (I), soit γ, et l'autre intérieur, soit γ'. Le cercle (Γ) de centre γ orthogonal à (I) coupe la droite $O\gamma'$ en ω et ϖ, toujours réels (car le rayon de (Γ) est $\geqq \gamma\gamma' \geqq \gamma O$), qui sont les points doubles cherchés.

b) *Cas particuliers.* — Ce sont ceux où le moment du vecteur $\vec{D}$ par rapport au point Φ est nul. Alors l'hyperbole (H) se décompose. Cela se présente dans les cas suivants:

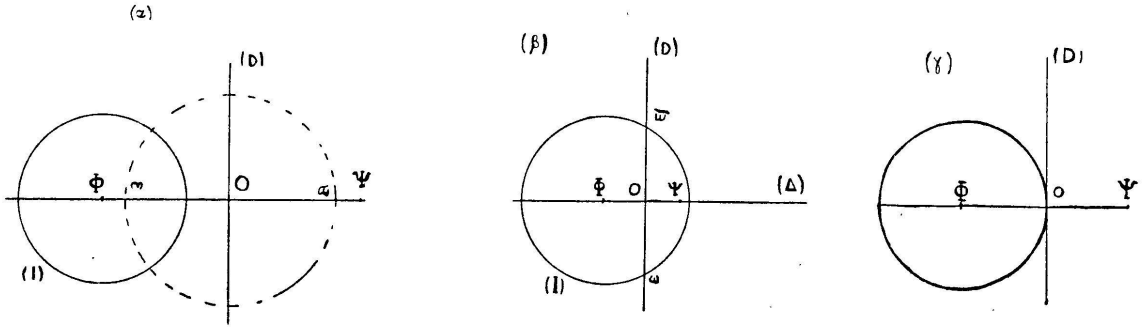

Fig. 3.

1° $\vec{D}$ *a une longueur nulle* (fig. 3). — Le retournement se réduit à une symétrie autour de la droite (D) ou *renversement* R; $\mathcal{C} = IR$.

(α) (D) ne coupe pas le cercle (I). Il y a deux points doubles ω et ϖ, intersection de (Δ) et du cercle de centre O orthogonal à (I).

(β) (D) coupe le cercle (I); les points d'intersection ω et ϖ sont les points doubles cherchés.

(γ) (D) est tangente au cercle (I) en O. Ce point O est le seul

point double de la transformation. (Il convient de le compter pour deux).

2° $\vec{D}$ *a une longueur différente de zéro, mais son support* (D) *passe par* Φ (fig. 4). — Le cercle de centre O, coupant (I) suivant un diamètre, coupe (D) en deux points ω et ϖ, qui sont doubles.

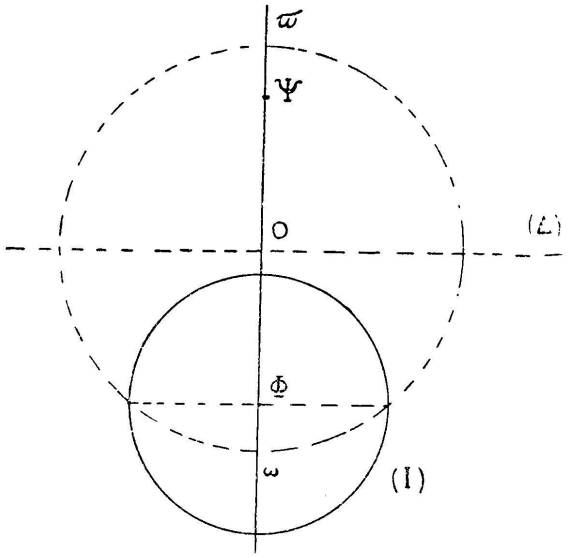

Fig. 4.

Dans tous les cas, on a donc *deux points doubles réels distincts ou confondus*, ω et ϖ, que nous appellerons les *pôles* de la transformation. Les segments $\Phi\Psi$ et $\omega\varpi$ ont même milieu O. Ce sont ces diagonales du *parallélogramme de base* $\omega\Phi\varpi\Psi$, dont la forme caractérise la transformation correspondante, comme nous allons le démontrer dans ce qui suit.

§ **6.** — *Similitude image d'une transformation circulaire.* — L'existence de deux points doubles réels, distincts ou confondus, va nous permettre d'introduire la notion de similitude image de $\mathcal{C}$, conformément aux théorèmes suivants:

THÉORÈME VI. — *Etant donnée une transformation* $\mathcal{C}$, *on peut la transformer par une* Γ *convenable, en particulier par une inversion, en une similitude directe* $\mathcal{S}$.

Prenons en effet une transformation circulaire J quelconque assujettie simplement à avoir pour foyer-objet un pôle ϖ de $\mathcal{C}$. La transformée de $\mathcal{C}$ par J est $\mathcal{C}' = J^{-1}\mathcal{C}J$. On voit qu'elle admet ∞ comme point double, car $\infty \times J^{-1}\mathcal{C}J = \varpi \times \mathcal{C}J = \varpi \times J = \infty$; c'est donc une similitude.

THÉORÈME VII. — *Toutes les similitudes ainsi obtenues à partir d'une même* $\mathcal{C}$ *sont semblables, c'est-à-dire ont même angle et même rapport.*

En effet, si $\mathcal{S} = J^{-1}\mathcal{C}J$ et $\mathcal{S}' = J'^{-1}\mathcal{C}J'$, on en déduit $\mathcal{S}' = J'^{-1}J\mathcal{S}J^{-1}J' = \sigma^{-1}\mathcal{S}\sigma$ en posant $\sigma = J^{-1}J'$, et l'on voit comme tout à l'heure que σ est une similitude.

THÉORÈME VIII (fondamental). — *Quand $\mathcal{C}$ subit une transformation du groupe Γ, la similitude S subit une similitude Σ, c'est-à-dire garde encore même angle et même rapport.*

En effet, si $\mathcal{C}' = \Gamma^{-1}\mathcal{C}\Gamma$ avec $\mathcal{S} = J^{-1}\mathcal{C}J$ et $\mathcal{S}' = K^{-1}\mathcal{C}'K$, on a $\mathcal{S}' = K^{-1}\Gamma^{-1}\mathcal{C}\Gamma K = K^{-1}\Gamma^{-1}J\mathcal{S}J^{-1}\Gamma K = \Sigma^{-1}\mathcal{S}\Sigma$, en posant $\Sigma = J^{-1}\Gamma K$, et l'on voit encore que Σ est une similitude.

Donc *le rapport* k *et l'angle* α *de la similitude directe* $\mathcal{S}$ *sont des invariants de* $\mathcal{C}$ *dans le groupe* Γ. La similitude $\mathcal{S}$ définie à une similitude près, sera dite l'*image* de $\mathcal{C}$. L'étude de ces images nous donnera les *propriétés intrinsèques* des transformations $\mathcal{C}$.

§ **7.** — *Etude sommaire des différents types de transformations* $\mathcal{C}$. — Nous n'avons qu'à tirer ici les conséquences des théorèmes fondamentaux qui précèdent.

1° *Type général.* — Les pôles ω et ϖ sont distincts. L'image $\mathcal{S}$ est une similitude de pôle ω_i, de rapport k et d'angle α. Pour la commodité, nous supposons qu'on l'a obtenue à l'aide d'une Γ directe.

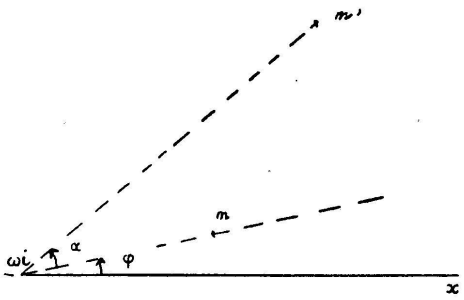

Fig. 5.

Prenons dans le plan-image (fig. 5) des coordonnées polaires ρ et φ, avec le pôle ω_i comme centre, et un axe $\omega_i x$ arbitraire. Les équations de $\mathcal{S}$ sont

$$\rho' = k\rho\,, \qquad \varphi' = \varphi + \alpha\,. \qquad (5)$$

Dans le plan où opère $\mathcal{C}$, définissons chaque point M par un segment de cercle $\omega M \varpi$ capable de l'angle $(\overrightarrow{M\varpi}, \overrightarrow{M\omega}) = \sigma$, compris entre 0 et 2π, et par un cercle du faisceau orthogonal, défini par le paramètre positif $\dfrac{M\omega}{M\varpi} = \tau$.

Les quantités σ et τ sont les « coordonnées circulaires » de M par rapport aux pôles ω et ϖ. Elles sont liées aux coordonnées polaires ρ et φ de l'image m par des relations de la forme

$$\varphi = \sigma - \sigma_0\,. \qquad \rho = a\tau\,. \qquad (6)$$

En effet la première découle de ce que Γ conserve les angles:

$\varphi = (\omega_i x, \omega_i m)$ est égal à l'angle en ω, dans le plan primitif, du segment de cercle (σ_0) ayant pour image $\omega_i x$, avec le segment $\omega M \varpi$, angle qui est égal à $\sigma - \sigma_0$. La deuxième formule n'est autre que celle de la transformation des distances dans l'inversion composante de Γ, de foyer ϖ et puissance r^2:

$$\frac{\omega_i m}{\omega M} = \frac{r^2}{\varpi\omega \cdot \varpi M}.$$

Or $\omega_i m = \rho$ et $\omega M = \tau . \varpi M$; donc

$$\frac{\rho}{\tau \cdot \varpi M} = \frac{r^2}{\varpi\omega \cdot \varpi M'},$$

d'où

$$\rho = \frac{r^2}{\varpi\omega} \cdot \tau = a\tau,$$

en posant $$a = \frac{r^2}{\varpi\omega}.$$

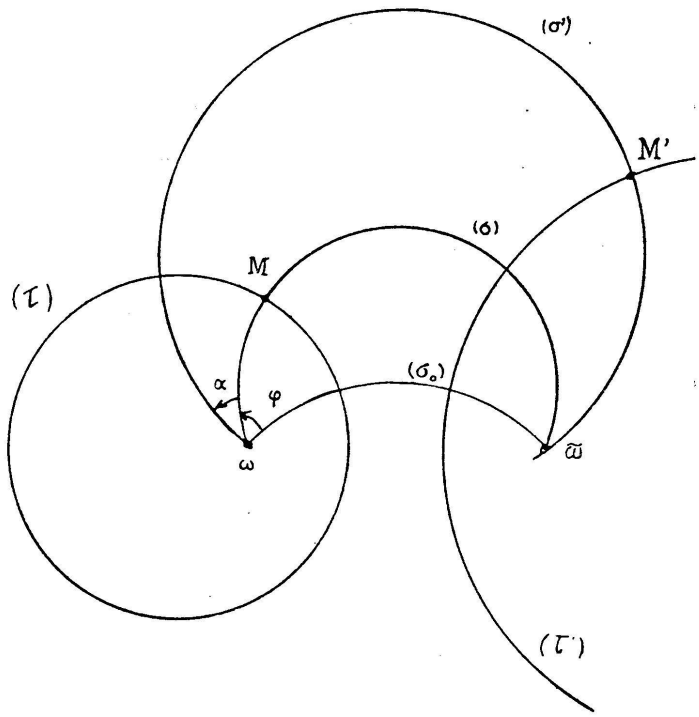

Fig. 6.

[On peut en particulier prendre pour Γ l'involution plane de foyer ϖ, axe $\varpi\omega$, puissance $r^2 = \overline{\varpi\omega}^2$, qui conserve ω ; alors ω_i se confond avec ω, et $a = \varpi\omega$, $\rho = \varpi\omega . \tau$.]

En portant dans (5) les valeurs (6) de φ et ρ, on a:

$$\boxed{\tau' = k\tau, \qquad \sigma' = \sigma + \alpha}. \tag{7}$$

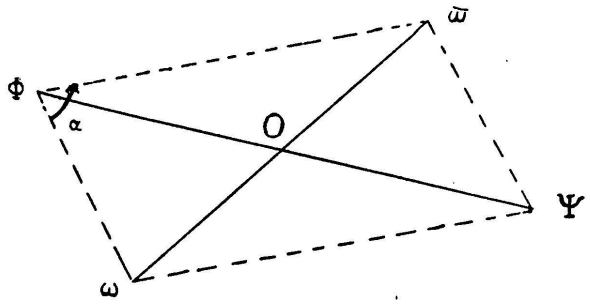

Fig. 7.

Ce sont les *équations intrinsèques* de $\mathcal{C}$, invariantes dans le groupe Γ.

Relation entre la similitude image et la figure focale (interprétation géométrique des invariants k *et* α*)* (fig. 7).

Appliquons les relations (7) aux points Φ et ∞, c'est-à-dire écrivons que $\Phi.\mathcal{C} = \infty$. On a pour Φ :

$$\tau = \frac{\Phi\omega}{\Phi\varpi} \qquad \sigma = (\overrightarrow{\Phi\varpi}, \overrightarrow{\Phi\omega})$$

et pour ∞ :

$$\tau' = 1 \qquad \sigma' = 0$$

d'où

$$1 = k \cdot \frac{\Phi\omega}{\Phi\varpi}, \qquad 0 = (\overrightarrow{\Phi\varpi}, \overrightarrow{\Phi\omega}) + \alpha, \tag{7'}$$

ou

$$\boxed{k = \frac{\Phi\varpi}{\Phi\omega}, \qquad \alpha = (\overrightarrow{\Phi\omega}, \overrightarrow{\Phi\varpi})} \; . \tag{8}$$

La similitude $\mathcal{S}$ est celle qui, avec le centre Φ, fait passer de ω à ϖ.

Dire que k et α sont invariants revient donc à dire que *la forme du parallélogramme de base de $\mathcal{C}$ est invariante dans le groupe* Γ.

[$\mathcal{C}$ étant donnée par son parallélogramme $\omega\varpi\Phi\Psi$, si l'on se donne ω' et ϖ' transformés de ω et ϖ, cela suffit à déterminer $\mathcal{C}'$, car on construit immédiatement Φ' et Ψ'.]

Etudions les différents cas:

a) $k \neq 1$ et $\alpha \neq 0$; $\mathcal{S}$ est une similitude quelconque (fig. 2). $\mathcal{C}$ ne possède aucun cercle double, et n'est en aucun cas involutive. Si l'entier $p \to +\infty$, A étant un point donné, $A_p = A.\mathcal{C}^p$ tend vers ω si $k < 1$, et vers ϖ si $k > 1$.

b) $k \neq 1$ et $\alpha = 0$; $\mathcal{S}$ est une homothétie $\mathcal{H}$. Nous dirons que $\mathcal{C}$ est du *type homothétie*, et nous la noterons $\mathcal{C}_h$. Ses équations intrinsèques sont

$$\tau' = k\tau, \qquad \sigma' = \sigma \; . \tag{9}$$

Tous les cercles (σ) sont doubles. Si $p \to +\infty$, A_p tend vers ω ou ϖ en restant sur le même cercle (σ).

Le parallélogramme de base est aplati. Ce cas correspond à la figure 3 (α) et à la figure 4.

c) $k = 1$ et $\alpha \neq 0$. $\mathcal{S}$ est une rotation $\mathcal{R}$.

Nous dirons que $\mathcal{C}$ est du type rotation, et nous la noterons $\mathcal{C}_r$. Les équations intrinsèques sont

$$\tau' = \tau \,, \qquad \sigma' = \sigma + \alpha \,. \tag{10}$$

Les cercles (τ) sont doubles; le parallélogramme de base est un losange (fig. 3 (β)).

Le point A ayant les coordonnées σ et τ, le point $A_p = A$. $\mathcal{C}^p$ a les coordonnées $\sigma + p\alpha$ et τ. $\mathcal{C}_r$ est involutive d'ordre p si $\alpha = \dfrac{2\pi}{p}$.

En particulier $\mathcal{C}$ est réciproque si $\alpha = \pi$. Alors Φ et Ψ se confondent avec O; le losange est aplati (fig. 8). L'image est une

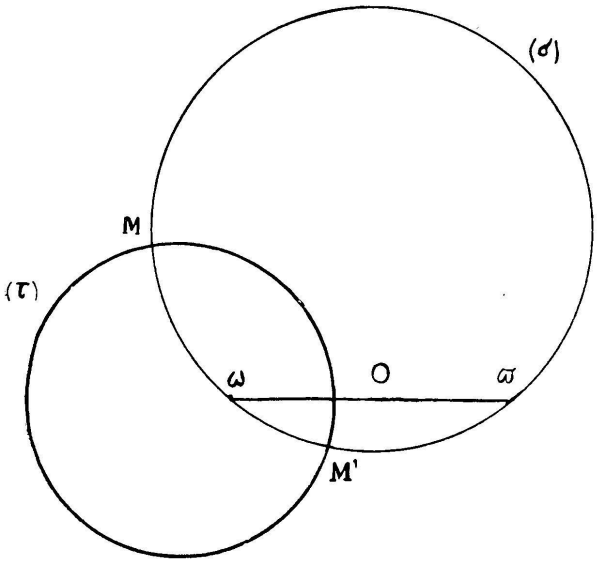

Fig. 8.

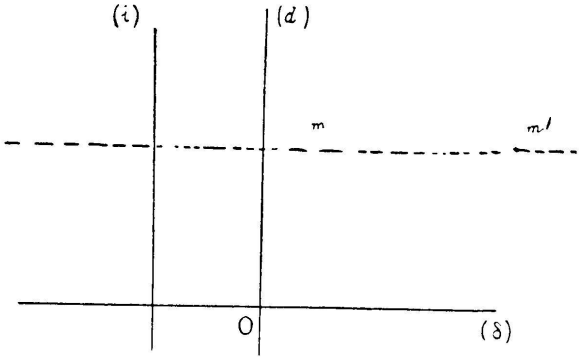

Fig. 9.

symétrie autour de ω. La transformation est l'involution plane $\mathcal{J}$, dont les équations intrinsèques sont:

$$\tau' = \tau \,, \qquad \sigma' = \sigma + \pi \,. \tag{11}$$

Les cercles (τ) sont toujours conservés; les cercles (σ) le sont aussi; mais alors que les « cycles » ou cercles orientés (τ) le sont également, les cycles (σ) ne le sont pas: sur un cercle (σ), les deux segments limités par ω et ϖ sont échangés dans la transformation. Deux points conjugués M et M′ sont les points communs à un cercle (σ) et à un cercle (τ). Les points $\omega\varpi$MM′ forment un quadrilatère harmonique.

Autres cas simples: $p = 3$ donne l'involution plane ternaire définie par $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ (losange de base formé de deux triangles équilatéraux). $p = 4$ donne l'involution plane quaternaire: $\alpha = \frac{\pi}{2}$; losange de base devenu un carré. Etc...

2° *Type translation* (fig. 10). — C'est le cas où ω et ϖ sont confondus, c'est-à-dire où $\mathcal{C}$ est le produit d'une inversion par

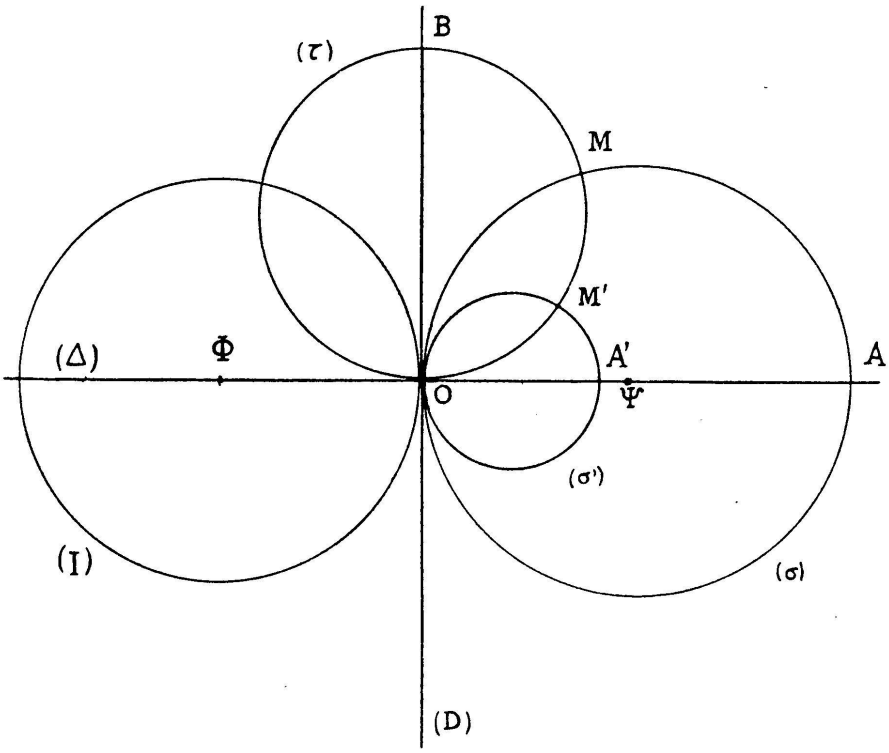

Fig. 10.

une symétrie autour d'une droite D tangente au cercle d'inversion (I) au point O. Ce point O est le seul point double (Cf. § 5).

L'image $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}_l$, obtenue par une Γ de foyer-objet O est le produit d'une symétrie autour d'une droite (i) parallèle à (d) par la symétrie autour de (d); c'est une translation de vecteur $\vec{l}$ parallèle à (δ) (fig. 9). On en déduit que les cercles (τ) tangents à (Δ) en O sont conservés dans $\mathcal{C}_l$, ce que l'on pouvait remarquer *a priori*.

Un point M étant toujours défini par un cercle τ et un cercle σ, de diamètres respectifs $\overline{OB}$ et $\overline{OA}$, les coordonnées cartésiennes x et y de son image m, par rapport à (δ) et (d), sont de la forme

$$x = \frac{r^2}{\overline{OA}}, \qquad y = \frac{r^2}{\overline{OB}}, \tag{12}$$

et les équations de $\mathcal{C}_l$ sont

$$x' = x + a \,, \qquad y' = y \tag{13}$$

$\left(a = \dfrac{r^2}{\overline{\Phi O}}\right.$ n'est pas un invariant$\left.\right)$.

Conclusion. — Tous les cas possibles ont été examinés. Retenons que *toute transformation circulaire directe est la transformée d'une similitude directe par une inversion.*

Ce théorème n'est pas vrai dans l'espace pour les transformations sphériques. Le théorème analogue pour les transformations inverses est vrai dans l'espace, mais non dans le plan.

Chapitre III. — Les transformations circulaires inverses.

§ **8.** — On a vu (§ 3) qu'elles sont de la forme $C = I\mathcal{D}$. Nous allons les étudier d'une manière toute semblable à la précédente, mais les résultats seront essentiellement différents.

Généralités. — Dans le cas le plus général, le déplacement $\mathcal{D}$ est une rotation (fig. 11), d'un angle θ autour d'un point O;

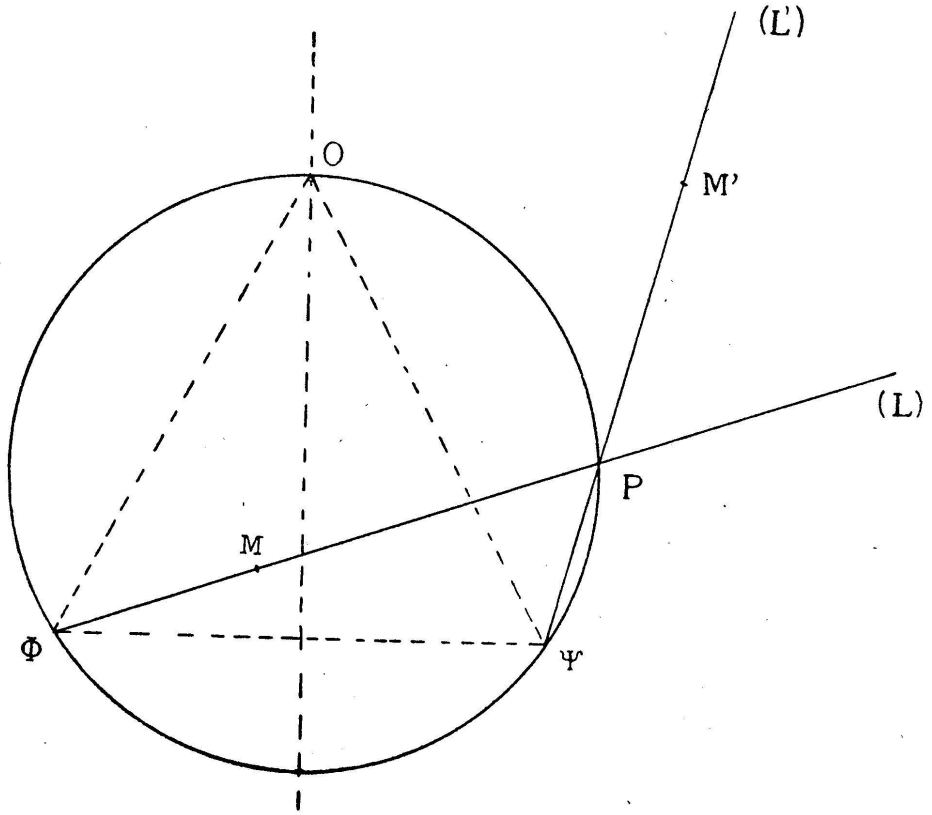

Fig. 11.