Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA COURBE DE L'HÔPITAL

Autor: Turrière, E.

Kapitel: 2. — Etude de la pression dans le mouvement sans FROTTEMENT DU POINT PESANT SUR UNE COURBE PLANE SITUÉE DANS UN PLAN VERTICAL.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28032

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Mais le problème ne fut résolu qu'en 1700, par le marquis de l'Hôpital, qui donna l'équation et quelques propriétés de la courbe dans le cas où elle est algébrique, c'est-à-dire lorsque la pression reste égale au poids du point matériel et qui se borna à indiquer que, dans le cas général, la courbe est transcendante; lorsque la pression est inférieure au poids, la transcendance est due à la présence de fonctions logarithmiques; lorsque la pression est supérieure au poids, les fonctions transcendantes introduites sont des fonctions circulaires.

L'Hôpital[1] donna, à la similitude près, l'équation suivante de la courbe à pression constante

$$5x = 2(y - \sqrt{y} - 1) \cdot \sqrt{2\sqrt{y} - 1} \ ;$$

l'axe Oy étant, dans sa figure, la verticale descendante. Il suffit de poser

$$y = \frac{(1 + \lambda^2)^2}{4} \ ,$$

dans cette équation, pour obtenir les expressions paramétriques de la quintique.

Cette courbe, qui a l'allure d'un folium à branches paraboliques, n'est autre que la courbe du *looping the loop*.

Enfin, M. L. Lecornu [2] a repris, en 1903, l'étude de la courbe à pression constante et il a montré que le mouvement sur l'hodographe était le mouvement képlérien des planètes.

2. — Etude de la pression dans le mouvement sans frottement du point pesant sur une courbe plane située dans un plan vertical.

L'axe Oy étant la verticale ascendante, l'intégrale des forces vives est tout d'abord

$$v^2 + 2gy = v_0^2 \ ;$$

v_0 est la vitesse au sommet (la vitesse minima).

---

[1] De l'Hôpital, Solution d'un problème physico-mathématique. *Mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de l'Académie royale des Sciences* (Paris) de 1700, p. 9-21.
Histoire de l'Académie royale des Sciences, 1700, p. 78-87.
P. Jullien, *Exercices de Mécanique*, t. I, 1886, p. 406.
A. de Saint-Germain, *Recueil d'exercices de Mécanique rationnelle*, 1889, p. 285-289.
Gino Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, t. II, 1936, p. 164.

[2] L. Lecornu, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 16 décembre 1903.
Cours de Mécanique, t. I, 1914, p. 337-341.

Soit α l'inclinaison sur l'horizontale Ox de la tangente à la courbe au point considéré; soit mgN la réaction normale. L'équation intrinsèque

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg\mathrm{N} - m\,g\cos\alpha\ ,$$

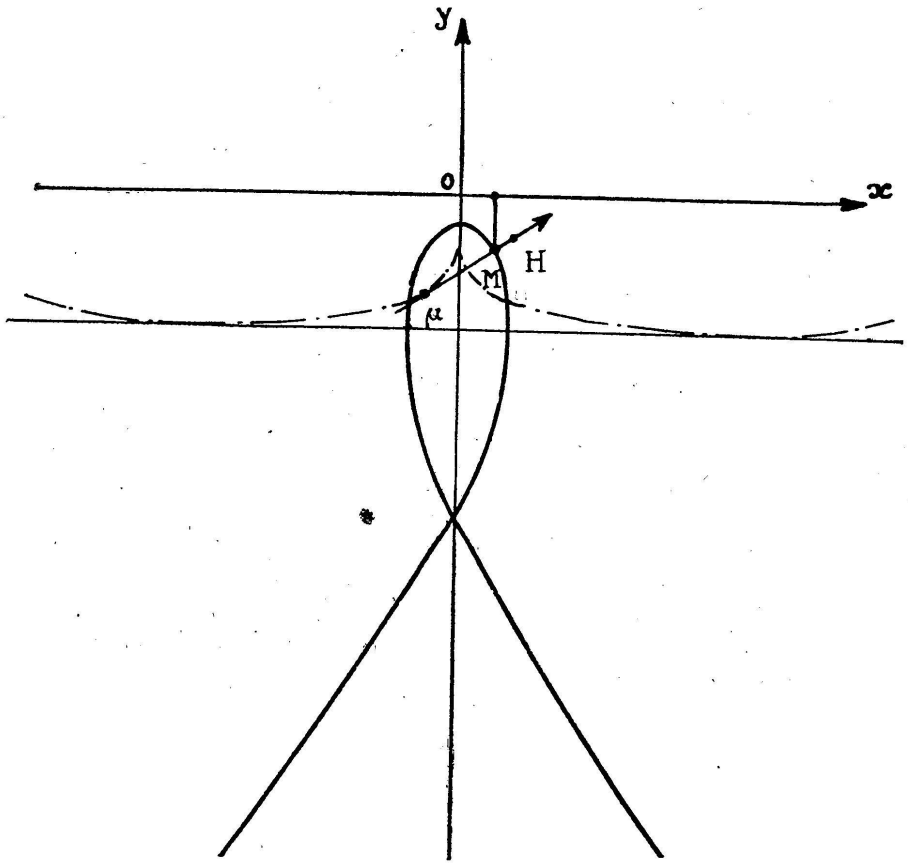
donne l'expression de N:

$$\mathrm{N} = \cos\alpha + \frac{v^2}{g\rho}\ ,$$

en fonction de la vitesse v, de l'angle α et du rayon de courbure ρ de la courbe.

Prenons pour axe Ox la droite qui permet de mettre l'intégrale des forces vives sous la forme réduite suivante:

$$v^2 + 2gy = 0\ ;$$



la vitesse serait théoriquement nulle aux points de rencontre de la courbe et de cet axe Ox, qui est donc une *directrice* de la courbe.

L'ordonnée y de tout point de l'arc utile de la courbe est

nécessairement négative ($y \leqq 0$). L'expression de la réaction prend ainsi la forme

$$N = \cos\alpha - \frac{2y}{\rho} .$$

(N est ici le rapport de la réaction au poids). Cette formule est explicitement donnée par L'HÔPITAL, qui la prend précisément pour départ de la solution du problème de BERNOULLI.

Nous ferons observer que cette formule générale pour la réaction normale s'écrit aussi sous la forme suivante

$$N = \frac{1}{\rho}(y_\mu - 3y) ,$$

en introduisant l'ordonnée y_μ du centre de courbure μ associé au point M:

$$y_\mu - y = \rho \cos\alpha .$$

Prenons encore, sur la normale en M, un point H situé de l'autre côté de M que le centre de courbure μ et tel que

$$\frac{MH}{M\mu} = -\frac{1}{2} .$$

Le point que j'ai nommé l'*orthocentre-limite* dans l'étude du triangle évanouissant formé par trois tangentes infiniment voisines d'une courbe[1] est précisément le point H ainsi défini.

Soit H_1 la projection orthogonale de l'orthocentre-limite H sur l'axe Ox des points où la vitesse serait nulle.

La formule générale de la pression (mgN) devient:

$$N = \frac{2}{\rho} \cdot HH_1 .$$

J'en ai indiqué une application immédiate au mouvement parabolique, dans le mémoire cité.

---

[1] E. TURRIÈRE, Sur un cas de dégénérescence de la géométrie du triangle. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LXIII, 1935, p. 211-226 (paragraphe 6, p. 218).