Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES

Autor: Lebesgue, Henri

Kapitel: 2. — Rappel de propriétés des faisceaux de CIRCONFÉRENCES.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28584

tions et les rapprochements d'autant que, dans la question actuelle, le rôle mystérieux des foyers n'a été compris des mathématiciens eux-mêmes que lorsque le raisonnement de Dandelin, la définition de Plücker ont fait des foyers des cercles focaux particuliers.

Deux articles, l'un de M. Ch. Bioche, l'autre de M. H. Mirabel, destinés à de jeunes élèves (*Les Sciences au Baccalauréat*, oct. 1937 — Paris, A. Hattier) montrent bien comment des maîtres avertis peuvent utiliser élémentairement la théorie des cercles focaux. Ces articles m'ont donné l'idée de présenter sous une forme moins concise et plus accessible une Note que j'avais publiée jadis (*Nouv. Ann. de Math.;* juin 1923); l'exposé qui en résulte est d'ailleurs en étroite parenté avec ceux constitués par les exercices cités ou avec la Note de M. Bioche.

2. — Rappel de propriétés des faisceaux de circonférences.

L'étude de l'axe radical Δ de deux circonférences Γ et Γ_1 de centres Ω et Ω_1 conduit à la relation

$$\mathcal{P}(\mathrm{M}, \Gamma) - \mathcal{P}(\mathrm{M}, \Gamma_1) + 2\overline{\Omega\Omega_1} \cdot \overline{\mathrm{M}\Delta} = 0 , \qquad (1)$$

dans laquelle le symbole $\mathcal{P}(\mathrm{M}, \Gamma)$, par exemple, représente la puissance d'un point M par rapport à Γ et le symbole $\overline{\mathrm{M}\Delta}$ le vecteur perpendiculaire à Δ dont l'origine est M et dont l'extrémité est sur Δ.

Si Γ_2 est une autre circonférence du faisceau Γ, Γ_1, et dont le centre est Ω_2, on a:

$$\mathcal{P}(\mathrm{M}, \Gamma) - \mathcal{P}(\mathrm{M}, \Gamma_2) + 2\overline{\Omega\Omega_2} \cdot \overline{\mathrm{M}\Delta} = 0 . \qquad (2)$$

D'où, par l'élimination de $\overline{\mathrm{M}\Delta}$,

$$\overline{\Omega_1\Omega_2}\,\mathcal{P}(\mathrm{M}, \Gamma) + \overline{\Omega_2\Omega}\,\mathcal{P}(\mathrm{M}, \Gamma_1) + \overline{\Omega\Omega_1}\,\mathcal{P}(\mathrm{M}, \Gamma_2) = 0 ; \qquad (3)$$

relation qui lie les trois puissances d'un point quelconque M *par rapport à trois cercles d'un faisceau.*

Si M est tel que la somme des deux premiers termes soit nulle, il en est de même du troisième et inversement; donc *le lieu des points* M *tels que,* λ *étant une constante donnée,*

$$\mathcal{P}(\mathrm{M}, \Gamma) = \lambda \mathcal{P}(\mathrm{M}, \Gamma_1) , \tag{4}$$

lequel est la droite Δ *pour* $\lambda = 1$, *est, pour* $\lambda \neq 1$, *la circonférence* Γ_2 *du faisceau* Γ, Γ_1 *dont le centre* Ω_2 *est tel que*

$$\frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega_1}} = \lambda . \tag{5}$$

Ce lieu n'existe donc que si cette circonférence existe. Plaçons-nous dans le cas où, Γ ayant le rayon R, Γ_1 est un cercle point. Δ est alors la parallèle à la polaire de Ω_1 par rapport à Γ, qui est équidistante de cette polaire et de Ω_1, c'est-à-dire la médiatrice de $\Omega_1 \Omega_1'$; Ω_1' étant tel que

$$\overline{\Omega\Omega_1'} \cdot \overline{\Omega\Omega_1} = \mathrm{R}^2 ;$$

Ω_1' est le second cercle point du faisceau. Le rayon R_2 de Γ_2 est donné de même par

$$\overline{\Omega_2\Omega_1'} \cdot \overline{\Omega_2\Omega_1} = \mathrm{R}_2^2 ;$$

il n'est donc réel que pour Ω_2 en dehors de $\Omega_1\Omega_1'$. Or, le rapport

$$\frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega_1}} = \frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega} + \overline{\Omega\Omega_1}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\overline{\Omega\Omega_1}}{\overline{\Omega\Omega_2}}} ,$$

varie de l'infini à

$$\frac{1}{1 - \dfrac{\overline{\Omega\Omega_1}}{\overline{\Omega\Omega_1'}}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\overline{\Omega\Omega_1}^2}{\mathrm{R}^2}} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}^2 - \overline{\Omega\Omega_1}^2} ,$$

sans passer par la valeur zéro, quand Ω_2 se déplace de Ω_1 à Ω_1'.

Donc le lieu existe, sauf si l'on a:

$$\lambda\left(\mathrm{R}^2 - \overline{\Omega\Omega_1}^2\right) > \mathrm{R}^2 . \tag{6}$$

Si les deux membres étaient égaux, le lieu se réduirait au point Ω_1'.