6. — Nature des courbes C, lorsque k est différent de 1.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

On passe d'un cercle focal, soit γ *de centre* ω *sur* Ox, *à un cercle* γ_1 *de la même série en remarquant qu'au déplacement* $\overline{\omega\omega_1}$ *du centre correspond le déplacement* $\overline{dd_1}$ *de la droite directrice, tel que*

$$k\,\overline{dd_1} = \overline{\omega\omega_1} \tag{14}$$

et que l'axe radical de γ *et* γ_1 *est la droite équidistante de* d *et de* d_1.

On passe aux cercles focaux de l'autre série en considérant les cercles définis par

$$\mathcal{P}(M, \gamma) = k\,\overline{MH}^2 \; ; \tag{10}$$

H *étant un point quelconque de la droite directrice* d *du cercle* γ.

6. — Nature des courbes $\mathcal{C}$, lorsque k est différent de 1.

Il sera démontré que $\mathcal{C}$ est une conique à centre si nous trouvons un cercle focal de rayon nul.

Γ sera de rayon nul, si cette circonférence est réduite à son centre, c'est-à-dire est le second cercle point du faisceau γ, H; donc si l'on a:

$$\overline{\omega\Omega} \cdot \overline{\omega H} = r^2 \, .$$

Ainsi, Ω devra être à la rencontre de Oy et du cercle δ inverse de d, γ étant le cercle d'inversion. Si δ coupe Oy, leurs points de rencontre sont des centres de cercles Γ de rayon nul; $\mathcal{C}$ est une conique d'axe focal Oy.

Or δ a pour diamètre

$$\frac{r^2}{\overline{\omega d}} \, ,$$

et, d'après (12),

$$\overline{\omega O} = K\,\overline{\omega d} \, ,$$

donc $\mathcal{C}$ *est une conique d'axe focal* Oy *si l'on a:*

$$K > 0 \, , \qquad r^2 > K\,\overline{\omega d}^2 \; ; \tag{15}$$

$\mathcal{C}$ *est une conique d'axe focal* Ox *si l'on a:*

$$k > 0 \, , \qquad R^2 > k\,\overline{\Omega D}^2 \, . \tag{16}$$

Si k *est négatif*, K est, d'après (13), compris entre 0 et 1; la première inégalité (15) est remplie, la seconde s'écrit encore, $1 - k$ étant positif,

$$(1 - k) r^2 > - k \overline{\omega d}^2 .$$

Si elle n'était pas vérifiée, on aurait

$$r^2 + k(\overline{\omega d}^2 - r^2) < 0 ;$$

ce qui exigerait, puisque k est négatif,

$$\omega d > r \qquad \text{et} \qquad k(\overline{\omega d}^2 - r^2) + r^2 < 0 ,$$

c'est-à-dire les deux inégalités (9), lesquelles ne sauraient être vérifiées à la fois, $\mathcal{C}$ étant réelle.

Donc, pour $k < 0$, $\mathcal{C}$ *est une ellipse d'axe focal* Oy, et l'on a une conclusion analogue pour $K < 0$.

Si k *et* K *sont tous deux positifs*, il n'y a plus lieu de tenir compte des conditions (9), qui ne peuvent être vérifiées simultanément que pour $k < 0$. D'après (13), on a alors $k > 1$, $K > 1$.

Ecrivons la relation (3) pour les trois cercles γ, Γ et H, et en prenant M au point H, il vient

$$\overline{H\Omega}(\overline{H\omega}^2 - r^2) + \overline{\omega H}(\overline{H\Omega}^2 - R^2) = 0 ,$$

où, d'après (11), (12), (13),

$$K(\overline{H\omega}^2 - r^2) + k(\overline{H\Omega}^2 - R^2) = 0 .$$

Les relations entre longueurs

$$H\omega^2 = \omega d^2 + OD^2 , \qquad H\Omega^2 = \Omega D^2 + od^2 ,$$

$$\left|\frac{k}{K}\right| = \frac{H\omega}{H\Omega} = \frac{\omega d}{od} = \frac{OD}{\Omega D} ,$$

transforment l'égalité précédente en

$$K[K\omega d^2 - r^2] + k[k\Omega D^2 - R^2] = 0 ,$$

ce qui prouve que les deux quantités entre crochets sont de signes contraires. Donc l'un ou l'autre des systèmes d'inégalités (15) ou (16) est vérifiée; $\mathcal{C}$ *est une hyperbole.*

Un cas particulier vaut d'être signalé; c'est celui où les deux crochets seraient nuls. Alors le cercle δ serait tangent à Oy en O; pour D confondu avec Ox, Γ se réduirait au point O et la relation $\overline{MO}^2 = K\overline{MD}^2$ montre que $\mathcal{C}$ est une hyperbole réduite à ses asymptotes. On laissera de côté ce cas limite dans la suite.

7. — Nature des courbes $\mathcal{C}$ lorsque k égale 1.

Pour éviter des complications de rédaction, on a supposé $k \neq 1$ depuis le § 5; pourtant l'étude des courbes $\mathcal{C}$ paraboliques peut être faite par les procédés des deux paragraphes précédents, seulement la lettre Γ désignera maintenant l'axe radical du faisceau H, γ. Il suffira donc de montrer que la marche de l'étude pour $k = 1$ pourrait être parallèle à celle de l'étude déjà faite.

La relation (1) donne pour tout point M_1 du plan

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) - \mathcal{P}(M_1, H) + 2\overline{\omega H} \cdot \overline{M_1\Gamma} = 0 ,$$

ce qui s'écrit encore:

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) - \overline{M_1 d}^2 = \overline{M_1 D}^2 - 2\overline{\omega H} \cdot \overline{M_1\Gamma} .$$

Or $\mathcal{C}$ est le lieu des points M_1 pour lequel le premier membre est nul, *donc $\mathcal{C}$ est aussi le lieu des points M_1 tels que l'on ait:*

$$\overline{M_1 D}^2 - 2\overline{\omega H} \cdot \overline{M_1\Gamma} = 0 ; \tag{17}$$

ou si l'on veut:

$$\sin\psi \cdot \overline{M_1 D}^2 - 2\overline{\omega d} \cdot \overline{M_1\Gamma} = 0 , \tag{17'}$$

ψ étant l'angle de Γ et de ωx.

Réciproquement, on déduira de l'équation (17) des cercles focaux ayant leurs centres sur ωx; γ est l'un d'eux. Les relations entre la série des droites Γ et celle des cercles focaux sont les mêmes que précédemment, seulement la relation (14) s'est simplifiée; devenue

$$\overline{\omega\omega_1} = \overline{dd_1} \tag{14'}$$

elle exprime la propriété déjà énoncée: la sous-normale est constante.