SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉOMÉTRIQUES DE CHARLES STURM

Autor(en): **Vivanti, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28596

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉOMÉTRIQUES DE CHARLES STURM

PAR

G. VIVANTI (Milan).

M. Gino LORIA a attiré mon attention sur quelques théorèmes géométriques contenus dans une Note [1] de Charles STURM. Les voici:

A. — *Le lieu géométrique des points tels que la somme des puissances* $m^{\text{ièmes}}$ *de leurs distances aux côtés d'un* n-*gone régulier soit constante, est une circonférence concentrique au polygone, pourvu que* m *soit plus petit que* n.

B. — *La même chose pour une fonction symétrique rationnelle entière de degré* m *de ces distances.*

C. — *La même chose pour les puissances* $m^{\text{ièmes}}$ *des distances d'un point aux sommets d'un polygone régulier, pourvu que* m *soit pair et plus petit que* n.

Le théorème A est dû à L'HUILLIER; Sturm en donne une simple vérification. Les autres sont seulement énoncés.

Je me propose de démontrer ces théorèmes en en précisant quelques points, et d'y ajouter quelques généralisations dans le plan et dans l'espace.

---

[1] Théorèmes sur les polygones réguliers. *Ann. de math.*, 15, 1824-25, p. 250-256.

I. — Les théorèmes A et B.

De la relation

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

il suit

$$s_m = \sum_{h=0}^{n-1} c_h = \sum_{h=0}^{n-1} \cos\left(\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{h=0}^{n-1} e^{i\left(\varphi+\frac{2h\pi}{n}\right)} + \sum_{h=0}^{n-1} e^{-i\left(\varphi+\frac{2h\pi}{n}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(\varphi+2\pi)} - e^{i\varphi}}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} + \frac{e^{-i(\varphi+2\pi)} - e^{-i\varphi}}{e^{\frac{-2i\pi}{n}} - 1}\right] = 0 \ ,$$

pour $n \neq 1$.

On a de même, pour $m < n$

$$\sum_{h=0}^{n-1} \cos\left(\varphi + \frac{2mh\pi}{n}\right) = 0 \ .$$

Or

$$\cos^m\varphi = \frac{1}{2^m}\left[e^{im\varphi} + \binom{m}{1} e^{i(m-2)\varphi} + \ldots + e^{-im\varphi}\right]$$

$$= \frac{1}{2^m}\left[2\cos m\varphi + 2\binom{m}{1}\cos(m-2)\varphi + \ldots\right] \ ;$$

le dernier terme est

$$\binom{m}{\frac{m}{2}} \quad \text{ou} \quad 2\binom{m}{\frac{m-1}{2}}\cos\varphi \ ,$$

suivant que m est pair où impair. D'où, en vertu des formules trouvées,

$$s_m = \sum_{h=0}^{n-1} c_h^m = \begin{cases} \dfrac{1}{2^m}\dbinom{m}{m-2} n & \text{pour } m \text{ pair} \ , \\ 0 & \text{pour } m \text{ impair} \ . \end{cases} \tag{1}$$

Les sommes s_m de degré impair sont donc nulles; celles de degré pair sont des fonctions essentiellement positives, ration-

nelles et entières de n. Tout cela pour $m < n$; pour $m \geqslant n$ les choses ne vont pas ainsi, et c'est là la raison du défaut de continuité que Sturm remarquait avec surprise dans ses théorèmes.

On a en particulier

$$s_2 = \frac{n}{2}, \qquad s_4 = \frac{3n}{8}.$$

En outre, une fonction symétrique (nous entendons toujours: rationnelle et entière) des quantités $\cos\frac{2h\pi}{n}$ de degré m sera, en vertu d'un théorème bien connu, une fonction rationnelle et entière de $s_1, s_2, \ldots s_m$ et, par conséquent, pour $m < n$, une fonction rationnelle et entière de n.

Les résultats obtenus nous permettent de démontrer rapidement les théorèmes de Sturm.

Prenons comme origine des coordonnées le centre d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans un cercle de rayon 1, et faisons passer l'axe x par le milieu de l'un des côtés. Les cosinus directeurs des perpendiculaires aux côtés seront alors

$$\cos\frac{2h\pi}{n}, \qquad \sin\frac{2h\pi}{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1) \;;$$

la distance du centre aux côtés sera $\cos\frac{\pi}{n}$.

Les équations normales des côtés seront alors

$$x\cos\frac{2h\pi}{n} + y\sin\frac{2h\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{n} = 0,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho\cos\left(-\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) + \cos\frac{\pi}{n} = 0,$$

et les premiers membres de ces équations donneront les distances d_h du point (ρ, φ) aux côtés. Une fonction symétrique de degré m des d_h sera une fonction rationnelle et entière de ρ de degré m ayant comme coefficients des fonctions symétriques de degré $\leqslant m$ des quantités $\cos\left(-\varphi + \frac{2mh\pi}{n}\right)$, qui sont, comme nous l'avons trouvé pour $m < n$, des fonctions de n.

Notre fonction se réduit donc à une fonction rationnelle et entière de ρ et n, et le lieu des points pour lesquels elle a une valeur constante C sera représenté par l'équation

$$F(\rho, n) = C .$$

Ce lieu est donc constitué par *une ou plusieurs circonférences concentriques au polygone.* Le théorème B, dont A est un cas particulier, est ainsi démontré.

Le cas de plusieurs circonférences, dont nous donnons ci-dessous un exemple [1], ne peut pas se présenter dans le cas du théorème A.

En effet, on a

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cos^i \frac{\pi}{n} s_{m-i} \rho^{m-i} ;$$

dans le polynôme à droite les coefficients des puissances impaires de ρ pour $m < n$ sont nuls, et ceux des puissances paires sont des fonctions essentiellement positives de n, d'où il suit que l'équation en ρ

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h^m = \text{const.}$$

a tout au plus *une seule* racine positive.

---

1 Considérons pour $n = 5$, la fonction symétrique des d_h

$$f(d_h) = \sum_{h=0}^{4} d_h^4 - \frac{9}{20}\left[\sum_{h=0}^{4} d_h^2\right]^2 .$$

On trouve, en écrivant δ pour $\cos\frac{\pi}{5}$,

$$\sum_{h=0}^{4} d_h^4 = \frac{15}{8}\rho^4 + 15\,\delta^2\rho^2 + 5\delta^4 ,$$

$$\sum_{h=0}^{4} d_h^2 = \frac{5}{2}\rho^2 + 5\delta^2 .$$

Il en résulte

$$f(d_h) = -\frac{15}{16}\rho^4 + \frac{15}{4}\delta^2\rho^2 - \frac{25}{4}\delta^4$$

et l'équation

$$f(d_h) = -\frac{55}{16}\delta^4$$

a les racines $\rho^2 = \delta^2$, $\rho^2 = 3\delta^2$.

Il faut toutefois remarquer que le théorème A ne subsiste pas pour $m = 1$. Il résulte en effet

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = s_1 \rho + n \cos\frac{\pi}{n} = n \cos\frac{\pi}{n} ,$$

c'est-à-dire:

La somme (algébrique) des distances d'un point aux côtés d'un polygone régulier est constante pour tous les points du plan.

II. — Le théorème C.

Venons maintenant à la démonstration du théorème C.

Faisons passer l'axe des x par l'un des sommets du n-gone; les coordonnées des sommets seront alors

$$\cos\frac{2h\pi}{n} , \qquad \sin\frac{2h\pi}{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1) ,$$

et les carrés des distances du point (x, y) ou (ρ, φ) aux sommets seront

$$\begin{aligned} l_h^2 &= \left(x - \cos\frac{2h\pi}{n}\right)^2 + \left(y - \sin\frac{2h\pi}{n}\right)^2 \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho\left(x \cos\frac{2h\pi}{n} + y \sin\frac{2h\pi}{n}\right) \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(-\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) . \end{aligned}$$

Il s'en suit:

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i 2^i s_i \rho^i (\rho^2 + 1)^{m-i} .$$

Or, si $m < n$, toutes les sommes s_i d'indices impairs sont nulles et toutes celles d'indices pairs sont positives; il résulte que $\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m}$ est un polynôme en ρ à coefficients positifs et dépendant seulement de n. L'équation

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \text{const.} \qquad (m < n)$$

a donc tout au plus une racine positive, et le lieu géométrique qu'elle représente est constitué par *une seule* circonférence (réelle) au plus.

Le théorème C *est vrai non seulement pour les puissances paires inférieures à* n, *mais même pour celles inférieures à* 2n.

III. — Sur quelques polygones plans équilatères.

Losange. — Prenons comme origine des coordonnées le centre du polygone, et comme axes cartésiens obliques les parallèles à ses côtés; et soit λ l'angle des deux axes. En désignant par δ la demi-longueur des côtés, les équations normales des côtés sont

$$\pm x + \delta = 0 , \qquad \pm y + \delta = 0 .$$

Il suit de là

$$\frac{1}{\sin^2 \lambda} \sum_{h=0}^{3} d_h^2 = (x + \delta)^2 + (-x + \delta)^2 + (y + \delta)^2 + (-y + \delta)^2 =$$
$$= 2(x^2 + y^2 + 2\delta^2) ;$$

$$\frac{1}{\sin^3 \lambda} \sum_{h=0}^{3} d_h^3 = (x + \delta)^3 + (-x + \delta)^3 + (y + \delta)^3 + (-y + \delta)^3 =$$
$$= 2\delta[3(x^2 + y^2) + 2\delta^2] .$$

Les lieux $\sum_{h=0}^{3} d_h^2 = \text{const.}$ et $\sum_{h=0}^{3} d_h^3 = \text{const.}$ sont donc des ellipses, dont les diamètres parallèles aux côtés du losange sont conjugués et ont égale longueur.

Pour tout polygone équilatère ou non, les lieux $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^2 = \text{const.}$ sont des ellipses. En effet, le premier membre est une fonction quadratique de x, y, qui, par sa nature, ne peut représenter qu'une conique bornée.

Si le polygone a deux axes de symétrie orthogonaux, on vérifie aisément que les lieux $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^3$ sont aussi des ellipses.

Pour tout polygone équilatère la somme des distances d'un point aux côtés est constante pour tous les points du plan.

Si x_h, y_h ($h = 0, 1, \ldots, n-1$) sont les coordonnées des sommets du polygone, et l est la longueur commune des côtés, les équations normales des côtés sont

$$\frac{1}{l}\left[(y_{h+1} - y_h)\,x + (x_h - x_{h+1})\,y + (x_{h+1}\,y_h - x_h\,y_{h+1})\right] = 0 \ .$$

Il suit immédiatement de là

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = \frac{1}{l}\sum_{h=0}^{n-1} (x_{h+1}\,y_h - x_h\,y_{h+1}) \ .$$

IV. — Les polyèdres réguliers.

Je vais démontrer les théorèmes suivants:

D. — *La somme algébrique des distances d'un point aux faces d'un polyèdre régulier est constante pour tous les points de l'espace.*

E. — *Le lieu des points tels, que la somme des puissances* m^{ièmes} *de leurs distances aux faces d'un polyèdre régulier soit constante, est une sphère concentrique au polyèdre pour les valeurs suivantes de* m:

2 *pour le tétraèdre;*
2 *et* 3 *pour l'hexaèdre et l'octaèdre;*
2, 3 *et* 4 *pour le dodécaèdre et l'icosaèdre* [1].

La même chose, sauf l'unicité de la sphère, pour toute fonction symétrique des distances, avec les mêmes limitations pour le degré m.

F. — *Sous les mêmes conditions des théorèmes précédents pour le nombre* m, *le lieu des points tels, que la somme des* 2m^{ièmes} *puissances de leurs distances aux sommets d'un polyèdre soit constante, est une sphère concentrique au polyèdre.*

Les théorèmes D *et* E.

Prenons sur la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, n points distribués uniformément sur un

[1] On peut dire que m doit être moindre que le nombre des sommets disposés en couronne autour d'un axe dans le polyèdre respectif.

cercle situé dans un plan perpendiculaire à l'axe z. Désignons par (x_h, y_h, z_h) et par $\left(1, \eta_h, \frac{\pi}{2} - \gamma\right)$ $(h = 0, 1, \ldots n-1)$ leurs coordonnées cartésiennes et polaires; z_h et γ sont indépendants de h et

$$\eta_h = \eta_0 + \frac{2h\pi}{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1) .$$

Si (x, y, z) et (ρ, φ, ψ) sont les coordonnées cartésiennes et polaires d'un point quelconque de l'espace, on a

$$xx_h + yy_h + zz_h = \rho\left\{(\cos\varphi\cos\eta_h + \sin\varphi\sin\eta_h)\sin\gamma\cos\psi + \right.$$

$$\left. + \cos\gamma\sin\psi\right\} = \rho\left\{\cos\left(\eta_0 - \varphi + \frac{2h\pi}{n}\right)\sin\gamma\cos\psi + \cos\gamma\sin\psi\right\} .$$

Or nous avons trouvé, quel que soit φ [voir éq. (1)]:

$$s_1 = \sum_{h=0}^{n-1}\cos\left(\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) = 0 \qquad \text{pour} \quad n > 1 ,$$

$$s_2 = \sum_{h=0}^{n-1}\cos^2\left(\varphi + \frac{2\pi h}{n}\right) = \frac{n}{2} \qquad \text{pour} \quad n > 2 ,$$

$$s_3 = \sum_{h=0}^{n-1}\cos^3\left(\varphi + \frac{2\pi h}{n}\right) = 0 \qquad \text{pour} \quad n > 3 ,$$

$$s_4 = \sum_{h=0}^{n-1}\cos^4\left(\varphi + \frac{2\pi h}{n}\right) = \frac{3n}{8} \qquad \text{pour} \quad n > 4 .$$

Il s'en suit, sous les mêmes conditions

$$\sum_{h=0}^{n-1}(xx_h + yy_h) = 0 ,$$

$$\sum_{h=0}^{n-1}(xx_h + yy_h)^2 = \frac{n}{2}\rho^2\cos^2\gamma\sin^2\psi ,$$

$$\sum_{h=0}^{n-1}(xx_h + yy_h)^3 = 0 ,$$

$$\sum_{h=0}^{n-1}(xx_h + yy_h)^4 = \frac{3n}{8}\rho^4\cos^4\gamma\sin^4\psi ,$$

et, par conséquent:

$$\left.\begin{aligned}
P_{1,n} &= \sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h + zz_h) = n\rho \cos\gamma \sin\psi \,, \\
P_{2,n} &= \sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h + zz_h)^2 = \\
&\qquad = \frac{n}{2}\rho^2 [\cos^2\psi \sin^2\gamma + 2\sin^2\psi \cos^2\gamma] \,, \\
P_{3,n} &= \sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h + zz_h)^3 = \\
&\qquad = \frac{n}{2}\rho^3 [3\cos^2\psi \sin^2\gamma + 2\sin^2\psi \cos^2\gamma] \sin\psi \cos\gamma \,, \\
P_{4,n} &= \sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h + zz_h)^4 = \\
&\qquad = n\rho^4 \left[\frac{3}{8}\cos^4\psi \sin^4\gamma + \right. \\
&\qquad \left. + 3\cos^2\psi \sin^2\psi \cos^2\gamma \sin^2\gamma + \sin^4\psi \cos^4\gamma\right] .
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Il va sans dire que l'expression de $P_{k,n}$ est valable seulement pour $k < n$.

Supposons un polyèdre régulier inscrit dans une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, et disposons-le de façon qu'une ou deux faces soient parallèles au plan xy (tétraèdre, hexaèdre, dodécaèdre), ou qu'un sommet se trouve au point (0, 0, 1) (tétraèdre, octaèdre, icosaèdre). Nous pourrons distinguer dans le polyèdre

a) des faces parallèles au plan xy;

b) des couronnes de faces également inclinées sur l'axe z, et déduisibles de l'une d'elles par des rotations successives d'un sous-multiple $\frac{2\pi}{n}$ de 2π autour de l'axe z; nous dirons que n est *l'ordre* de la couronne.

L'équation normale d'une face parallèle au plan xy est

$$\pm z + \delta = 0 \,, \qquad (3)$$

où δ est la distance du centre aux faces.

Les équations normales des faces d'une couronne d'ordre n et d'inclinaison γ sont [1]

$$xx_h + yy_h + zz_h + \delta = 0 , \tag{4}$$

où (x_h, y_h, z_h) est le point de rencontre de la sphère avec la perpendiculaire à la face issue du centre, ou, ce qui est la même chose, où x_h, y_h, z_h sont les cosinus directeurs de cette perpendiculaire. Les premiers membres des équations (3) et (4) donnent les distances du point (x, y, z) aux faces.

Cela posé, calculons pour les différents polyèdres les sommes des puissances $m^{\text{ièmes}}$ d'un point (x, y, z) aux faces, que nous désignerons par T_m.

Tétraèdre. — Disposons le polyèdre de façon qu'un sommet soit le point (0, 0, 1). Le polyèdre contient alors

une face parallèle au plan xy à distance $\delta = \frac{1}{3}$ du centre;

une couronne d'ordre 3;

le cosinus de l'inclinaison de la perpendiculaire par rapport à l'axe z est le rapport de δ à 1, c'est-à-dire:

$$\cos\gamma = \frac{1}{3} , \qquad \sin\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3} .$$

Les sommes des distances et des carrés des distances du point (x, y, z) ou (ρ, φ, ψ) à la face horizontale et aux faces de la couronne seront respectivement

$$-\rho\sin\psi + \delta , \qquad (-\rho\sin\psi + \delta)^2 ,$$

et

$$xx_h + yy_h + zz_h + \delta , \qquad (xx_h + yy_h + zz_h + \delta)^2 .$$

---

[1] Par inclinaison d'une couronne nous entendons l'angle de l'axe z avec les perpendiculaires aux faces de la couronne.

On aura donc:

$$T_1 = [-\rho \sin\psi + \delta] + [P_{1,3} + 3\delta] ,$$
$$T_2 = [-\rho \sin\psi + \delta]^2 + [P_{2,3} + 2P_{1,3}\delta + 3\delta^2] ,$$

ou

$$T_1 = [-\rho \sin\psi + \delta] + [\rho \sin\psi + 3\delta] = 4\delta = \text{const.} ,$$
$$T_2 = [\rho^2 \sin^2\psi - 2\delta\rho \sin\psi + \delta^2] +$$
$$+ \left[\frac{3}{2}\rho^2\left(\frac{8}{9}\cos^2\psi + \frac{2}{9}\sin^2\psi\right) + 2\delta\rho \sin\psi + 3\delta^2\right] =$$
$$= \frac{4}{3}\rho^2 + 4\delta^2 .$$

Les théorèmes D et E sont donc démontrés pour le tétraèdre.

Hexaèdre. — Deux faces parallèles au plan xy; une couronne d'ordre 4 où $\gamma = \frac{\pi}{2}$. On a donc pour les sommes des puissances des distances d'exposant < 4

$$T_1 = (-\rho \sin\psi + \delta) + (\rho \sin\psi + \delta) + (P_{1,4} + 4\delta) ,$$
$$T_2 = (-\rho \sin\psi + \delta)^2 + (\rho \sin\psi + \delta)^2 + (P_{2,4} + 2\delta P_{1,4} + 4\delta^2) ,$$
$$T_3 = (-\rho \sin\psi + \delta)^3 + (\rho \sin\psi + \delta)^3 +$$
$$+ (P_{3,4} + 3\delta P_{2,4} + 3\delta^2 P_{1,4} + 4\delta^3) ,$$

ou

$$T_1 = (-\rho \sin\psi + \delta) + (\rho \sin\psi + \delta) + 4\delta = 6\delta = \text{const.} ,$$
$$T_2 = (\rho^2 \sin^2\psi - 2\delta\rho \sin\psi + \delta^2) + (\rho \sin^2\psi + 2\delta\rho \sin\psi + \delta^2) +$$
$$+ (2\rho^2 \cos^2\psi + 4\delta^2) = 2\rho^2 + 6\delta^2 ,$$
$$T_3 = (-\rho^3 \sin^3\psi + 3\delta\rho^2 \sin^2\psi - 3\delta^2\rho \sin\psi + \delta^3) +$$
$$+ (\rho^3 \sin^3\psi + 3\delta\rho^2 \sin^2\psi + 3\delta^2\rho \sin\psi + \delta^3) +$$
$$+ (6\delta\rho^2 \cos^2\psi + 4\delta^3) = 6\delta(\rho^2 + \delta^2) .$$

Les deux théorèmes sont donc démontrés pour l'hexaèdre.

Octaèdre. — Deux couronnes d'ordre 4. La distance du centre aux faces est $\frac{1}{\sqrt{3}}$; il s'en suit

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} , \qquad \sin\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

On obtient:

$$T_1 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\rho \sin\psi + 4\delta\right) + \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\rho \sin\psi + 4\delta\right) = 8\delta = \text{const.},$$

$$T_2 = \left[2\rho^2\left(\frac{2}{3}\cos^2\psi + \frac{2}{3}\sin^2\psi\right) + \frac{8}{\sqrt{3}}\delta\rho \sin\psi + 4\delta^2\right]$$

$$+ \left[2\rho\left(\frac{2}{3}\cos^2\psi + \frac{2}{3}\sin^2\psi\right) - \frac{8}{\sqrt{3}}\delta\rho \sin\psi + 4\delta^2\right] =$$

$$= \frac{8}{3}\rho^2 + 8\delta^2,$$

$$T_3 = [A + 4\delta\rho^2 + B + 4\delta^3] + [-A + 4\delta\rho^2 - B + 4\delta^3] = 8\delta(\rho^2 + \delta^2)$$

où

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho^3\left(4\sin\psi + \frac{4}{3}\cos^2\psi\right), \qquad B = \frac{12}{\sqrt{3}}\delta^2\rho \sin\psi.$$

Les deux théorèmes sont donc démontrés pour l'octaèdre.

Dodécaèdre. — Deux faces parallèles au plan xy; deux couronnes d'ordre 5. Il faut calculer l'inclinaison γ de la perpendiculaire aux faces de l'une d'elles; pour l'autre l'inclinaison sera $\pi - \gamma$. On sait que l'angle dièdre η de deux faces contiguës du dodécaèdre régulier est déterminé par les relations, où $r = \sqrt{5}$,

$$\sin\eta = \frac{2}{r}, \qquad \cos\eta = -\frac{1}{r}.$$

Le supplément de cet angle est l'angle γ cherché; on a donc

$$\sin\gamma = \frac{2}{r}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{r}.$$

Il résulte, pour la face et la couronne supérieures prises ensemble, en omettant les termes qui se rencontreraient avec le signe opposé pour la face et la couronne inférieures,

$$T_1 = 6\delta, \qquad T_2 = 2\rho^2 + 6\delta^2, \qquad T_3 = 3\delta\rho^2 + 6\delta^3,$$

$$T_4 = \frac{6}{5}\rho^4 + 12\delta^2\rho^2 + 6\delta^4.$$

On a donc, en total

$$T_1 = 12\delta = \text{const.}\ , \qquad T_2 = 4\rho^2 + 12\delta^2\ , \qquad T_3 = 6\delta\rho^2 + 12\delta^3\ ,$$

$$T_4 = \frac{12}{5}\rho^4 + 24\delta^2\rho^2 + 12\delta^4\ .$$

Les deux théorèmes sont donc démontrés pour le dodécaèdre.

Icosaèdre. — Il y a deux couples de couronnes d'ordre 5. Calculons les inclinaisons respectives, que nous désignerons par γ (et $\pi - \gamma$) et γ_1 (et $\pi - \gamma_1$).

Si l'on mène du centre la perpendiculaire à l'une des faces issues du point (0, 0, 1), l'angle γ de cette perpendiculaire avec l'axe z positif appartiendra à un triangle rectangle, dont l'hypothénuse est 1, et le cathète opposé est formé par les $^2/_3$ de la hauteur de la face. Or on sait que la longueur de l'arête de l'icosaèdre est $\sqrt{\frac{2(r-1)}{r}}$; la hauteur de la face sera donc $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2(r-1)}{r}}$, et les $^2/_3$ de cette hauteur sera $\sqrt{\frac{2(r-1)}{3r}}$. Il résulte

$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{2(r-1)}{3r}}\ , \quad \cos\gamma = \sqrt{\frac{r+2}{3r}}\ .$$

L'angle $\gamma_1 - \gamma$ de la perpendiculaire aux faces de la seconde couronne et de la perpendiculaire à celles de la première est le supplément de l'angle dièdre η de deux faces contiguës, qui est déterminé par

$$\sin\eta = \frac{2}{3}\ , \quad \cos\eta = -\frac{r}{3}\ .$$

Il résulte donc:

$$\sin\gamma_1 = \sin(\gamma + \pi - \eta) = \sin(\eta - \gamma) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{r+2}{3r}} + \frac{r}{3}\sqrt{\frac{2r-2}{3r}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3r}}\left(2\sqrt{r+2} + r\sqrt{2r-2}\right)\ ,$$

$$\cos\gamma_1 = -\cos(\eta - \gamma) = \frac{r}{3}\sqrt{\frac{r+2}{3r}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2r-2}{3r}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3r}}\left(r\sqrt{r+2} - 2\sqrt{2r-2}\right)\ .$$

Or

$$\mu = (2\sqrt{r+2} + r\sqrt{2r-2})^2 = 4r + 8 + 10r - 10 + 4r\sqrt{(r+2)(2r-2)},$$
$$\nu = (r\sqrt{r+2} - 2\sqrt{2r-2})^2 = 5r + 10 + 8r - 8 - 4r\sqrt{(r+2)(2r-2)},$$
$$(r+2)(2r-2) = 6 + 2r = (r+1)^2 .$$

Donc

$$\mu = 14r - 2 + 4r(r+1) = 18(r+1) ,$$
$$\nu = 13r + 2 - 4r(r+1) = -18 + 9r = 9(r-2) ,$$

et

$$\sin\gamma_1 = \sqrt{\frac{2(r+1)}{3r}} , \quad \cos\gamma_1 = \sqrt{\frac{r-2}{3r}} .$$

Il suit de là:

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2\gamma + \sin^2\gamma_1 = \frac{4}{3} , \quad \cos^2\gamma + \cos^2\gamma_1 = \frac{2}{3} , \\ &\sin^4\gamma + \sin^4\gamma_1 = \frac{16}{15} , \quad \cos^4\gamma + \cos^4\gamma_1 = \frac{2}{5} , \\ &\sin^2\gamma\cos^2\gamma + \sin^2\gamma_1\cos^2\gamma_1 = \frac{4}{15} . \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

L'ensemble des deux couronnes extrêmes donne

$$T_1 = 10\delta ,$$
$$T_2 = 5\rho^2[\cos^2\psi\sin^2\gamma + 2\sin^2\psi\cos^2\gamma] + 10\delta^2 ,$$
$$T_3 = 15\delta\rho^2[\cos^2\psi\sin^2\gamma + 2\sin^2\psi\cos^2\gamma] + 10\delta^3 ,$$
$$T_4 = 10\rho^4\left(\frac{3}{8}\cos^4\psi\sin^4\gamma + 3\sin^2\psi\cos^2\psi\sin^2\gamma\cos^2\gamma + \sin^4\psi\cos^4\gamma\right)$$
$$+ 30\delta^2\rho^2(\cos^2\psi\sin^2\gamma + 2\sin^2\psi\cos^2\gamma) + 10\delta^4 .$$

Les formules analogues pour les deux couronnes moyennes s'obtiennent de celles-ci en substituant γ par γ_1. Il résulte en total, en vertu des relations (5)

$$T_1 = 20\delta = \text{const.} , \quad T_2 = \frac{20}{3}\rho^2 + 20\delta^2 , \quad T_3 = 40\delta\rho^2 + 20\delta^3 ,$$
$$T_4 = 8\rho^4 + 40\delta^2\rho^2 + 20\delta^4 .$$

Les théorèmes D et E sont maintenant démontrés pour tous les polyèdres réguliers. Et comme les T_m sont dans tous les cas

des polynômes en ρ *à coefficients positifs*, il y a toujours *une seule sphère au plus.*

Le théorème F.

Venons enfin au théorème F. Les points $(0, 0, \pm 1)$, et ceux que nous avons désignés par (x_h, y_h, z_h), sont les pôles sphériques des faces du polyèdre, c'est-à-dire les sommets du polyèdre *réciproque* (le tétraèdre pour le tétraèdre, l'octaèdre pour l'hexaèdre et *vice versa*, l'icosaèdre pour le dodécaèdre et *vice versa*).

Les carrés des distances d'un point (x, y, z) ou (ρ, φ, ψ) aux sommets du polyèdre sont donc respectivement

$$x^2 + y^2 + (z \mp 1)^2 \quad \text{ou} \quad (\rho^2 + 1) \mp 2\rho \sin \psi ,$$

$$(x - x_h)^2 + (y - y_h)^2 + (z - z_h)^2 \quad \text{ou} \quad (\rho^2 + 1) - 2 (xx_h + yy_h + zz_h) .$$

Les formules (2) nous permettent de calculer aisément les sommes des premières puissances paires des distances pour les différents polyèdres réguliers; les valeurs de γ trouvées nous donneront les inclinaisons des rayons qui vont aux sommets formant une couronne.

Tétraèdre. — Un sommet au point $(0, 0, -1)$; une couronne de sommets d'ordre 3 avec $\cos \gamma = \frac{1}{3}$, $\sin \gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Désignons en général par V_m la somme des puissances $2m^{\text{ièmes}}$ des distances; on a

$$V_1 = [(\rho^2 + 1) + 2\rho \sin \psi] + [3 (\rho^2 + 1) - 6\rho \cos \gamma \sin \psi] = 4 (\rho^2 + 1) ,$$

$$V_2 = [(\rho^2 + 1)^2 + 4\rho (\rho^2 + 1) \sin \psi + 4\rho^2 \sin^2 \psi] +$$
$$+ [3 (\rho^2 + 1)^2 - 4\rho (\rho^2 + 1) 3 \cos \gamma \sin \psi +$$
$$4 \cdot \frac{3}{2} \rho^2 (\cos^2 \psi \sin^2 \gamma + 2 \sin^2 \psi \cos^2 \gamma)] = 4 (\rho^2 + 1)^2 + \frac{16}{3} \rho^2 .$$

Hexaèdre. Deux couronnes d'ordre 4 avec

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} , \quad \sin \gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(les valeurs trouvées pour l'octaèdre). Il résulte, en omettant les termes qui se détruisent mutuellement, et en doublant les autres,

$$V_1 = 8(\rho^2 + 1) ,$$
$$V_2 = 8(\rho^2 + 1)^2 + 16\rho^2(\cos^2\psi \sin^2\gamma + 2\sin^2\psi\cos^2\gamma) =$$
$$= 8(\rho^2 + 1)^2 + \frac{32}{3}\rho^2 ,$$
$$V_3 = 8(\rho^2 + 1)^3 + 32\rho^2(\rho^2 + 1) .$$

Octaèdre. — Les points $(0, 0, \pm 1)$, et une couronne d'ordre 4 avec $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (la valeur trouvée pour l'hexaèdre). Il résulte, avec les omissions déjà adoptées,

$$V_1 = 2(\rho^2 + 1) + [4(\rho^2 + 1) - 8\rho\cos\gamma\cos\psi] = 6(\rho^2 + 1) ,$$
$$V_2 = 2[(\rho^2 + 1)^2 + 4\rho^2\sin^2\psi] + [4(\rho^2 + 1)^2 - 16\rho(\rho^2 + 1)\cos\gamma\cos\psi +$$
$$+ 8\rho^2(\cos^2\psi\sin^2\gamma + 2\sin^2\psi\cos^2\gamma)] = 6(\rho^2 + 1)^2 + 8\rho^2 ,$$
$$V_3 = 2[(\rho^2 + 1)^3 + 12\rho^2(\rho^2 + 1)\sin^2\psi] + [4(\rho^2 + 1)^3 +$$
$$+ 24\rho^2(\rho^2 + 1)\cos^2\psi] = 6(\rho^2 + 1)^3 + 24\rho^2(\rho^2 + 1) .$$

Dodécaèdre. — Deux couples de couronnes d'ordre 5; les angles γ et γ_1 sont déterminés par les formules trouvées pour l'icosaèdre

$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{2(r-1)}{3r}} , \quad \cos\gamma = \sqrt{\frac{r+2}{3r}} ,$$
$$\sin\gamma_1 = \sqrt{\frac{2(r+1)}{3r}} , \quad \cos\gamma_1 = \sqrt{\frac{r-2}{3r}} .$$

En vertu des relations (5), si $P'_{i,r}$ représentent les expressions $P_{i,r}$ où γ est substitué par γ_1, on obtient

$$P_{2,5} + P'_{2,5} = \frac{10}{3}\rho^2 , \quad P_{4,5} + P'_{4,5} = 2\rho^4$$

et par conséquent

$$V_1 = 20(\rho^2 + 1) ,$$
$$V_2 = 20(\rho^2 + 1)^2 + \frac{80}{3}\rho^2 ,$$
$$V_3 = 20(\rho^2 + 1)^3 + 80\rho^2(\rho^2 + 1) ,$$
$$V_4 = 20(\rho^2 + 1)^4 + 160\rho^2(\rho^2 + 1)^2 + 64\rho^4 .$$

Icosaèdre. — Les deux points $(0, 0, \pm 1)$, et deux couronnes d'ordre 5 avec la valeur de γ trouvée pour le dodécaèdre, c'est-à-dire

$$\sin \gamma = \frac{2}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{r}.$$

Il résulte

$$V_1 = 2(\rho^2 + 1) + 10(\rho^2 + 1) = 12(\rho^2 + 1),$$

$$V_2 = 2[(\rho^2 + 1)^2 + 4\rho^2 \sin^2 \psi] + 2\left[5(\rho^2 + 1)^2 + 10\rho^2\left(\frac{4}{5}\cos^2 \psi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2}{5}\sin^2 \psi\right)\right] = 12(\rho^2 + 1)^2 + 16\rho^2,$$

$$V_3 = 2[(\rho^2 + 1)^3 + 12\rho^2(\rho^2 + 1)\sin^2 \psi] + 2\left[5(\rho^2 + 1)^3 + 30\rho^2 \cdot\right.$$
$$\left.(\rho^2 + 1) \cdot \left(\frac{4}{5}\cos^2 \psi + \frac{2}{5}\sin^2 \psi\right)\right] = 12(\rho^2 + 1)^3 + 48\rho^2(\rho^2 + 1),$$

$$V_4 = 2[(\rho^2 + 1)^4 + 24\rho^2(\rho^2 + 1)\sin^2 \psi + 16\rho^4 \sin^4 \psi] + 2\left[5(\rho^2 + 1)^4 + \right.$$
$$\left. + 60\rho^2(\rho^2 + 1)\left(\frac{4}{5}\cos^2 \psi + \frac{2}{5}\sin^2 \psi\right)\right] + 80\left[\frac{6}{25}\cos^4 \psi + \right.$$
$$\left. + \frac{12}{25}\cos^2 \psi \sin^2 \psi + \frac{1}{25}\sin^4 \psi\right] = 12(\rho^2 + 1)^4 + 96\rho^2(\rho^2 + 1)^2 +$$
$$+ \frac{192}{5}\rho^4.$$

Le théorème F est ainsi complètement démontré, et le lieu ne peut se composer que *d'une seule sphère réelle tout au plus.*