Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉOMÉTRIQUES DE CHARLES STURM

Autor: Vivanti, G.

Kapitel: I. — Les théorèmes A et B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28596

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

I. — Les théorèmes A et B.

De la relation

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

il suit

$$s_m = \sum_{h=0}^{n-1} c_h = \sum_{h=0}^{n-1} \cos\left(\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{h=0}^{n-1} e^{i\left(\varphi+\frac{2h\pi}{n}\right)} + \sum_{h=0}^{n-1} e^{-i\left(\varphi+\frac{2h\pi}{n}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(\varphi+2\pi)} - e^{i\varphi}}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} + \frac{e^{-i(\varphi+2\pi)} - e^{-i\varphi}}{e^{\frac{-2i\pi}{n}} - 1}\right] = 0 \ ,$$

pour $n \neq 1$.

On a de même, pour $m < n$

$$\sum_{h=0}^{n-1} \cos\left(\varphi + \frac{2mh\pi}{n}\right) = 0 \ .$$

Or

$$\cos^m\varphi = \frac{1}{2^m}\left[e^{im\varphi} + \binom{m}{1} e^{i(m-2)\varphi} + \ldots + e^{-im\varphi}\right]$$

$$= \frac{1}{2^m}\left[2\cos m\varphi + 2\binom{m}{1}\cos(m-2)\varphi + \ldots\right] \ ;$$

le dernier terme est

$$\binom{m}{\frac{m}{2}} \quad \text{ou} \quad 2\binom{m}{\frac{m-1}{2}}\cos\varphi \ ,$$

suivant que m est pair où impair. D'où, en vertu des formules trouvées,

$$s_m = \sum_{h=0}^{n-1} c_h^m = \begin{cases} \dfrac{1}{2^m}\dbinom{m}{m-2} n & \text{pour } m \text{ pair} \ , \\ 0 & \text{pour } m \text{ impair} \ . \end{cases} \tag{1}$$

Les sommes s_m de degré impair sont donc nulles; celles de degré pair sont des fonctions essentiellement positives, ration-

nelles et entières de n. Tout cela pour $m < n$; pour $m \geqslant n$ les choses ne vont pas ainsi, et c'est là la raison du défaut de continuité que Sturm remarquait avec surprise dans ses théorèmes.

On a en particulier

$$s_2 = \frac{n}{2}, \qquad s_4 = \frac{3n}{8}.$$

En outre, une fonction symétrique (nous entendons toujours: rationnelle et entière) des quantités $\cos\frac{2h\pi}{n}$ de degré m sera, en vertu d'un théorème bien connu, une fonction rationnelle et entière de $s_1, s_2, \ldots s_m$ et, par conséquent, pour $m < n$, une fonction rationnelle et entière de n.

Les résultats obtenus nous permettent de démontrer rapidement les théorèmes de Sturm.

Prenons comme origine des coordonnées le centre d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans un cercle de rayon 1, et faisons passer l'axe x par le milieu de l'un des côtés. Les cosinus directeurs des perpendiculaires aux côtés seront alors

$$\cos\frac{2h\pi}{n}, \qquad \sin\frac{2h\pi}{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1) \;;$$

la distance du centre aux côtés sera $\cos\frac{\pi}{n}$.

Les équations normales des côtés seront alors

$$x\cos\frac{2h\pi}{n} + y\sin\frac{2h\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{n} = 0,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho\cos\left(-\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) + \cos\frac{\pi}{n} = 0,$$

et les premiers membres de ces équations donneront les distances d_h du point (ρ, φ) aux côtés. Une fonction symétrique de degré m des d_h sera une fonction rationnelle et entière de ρ de degré m ayant comme coefficients des fonctions symétriques de degré $\leqslant m$ des quantités $\cos\left(-\varphi + \frac{2mh\pi}{n}\right)$, qui sont, comme nous l'avons trouvé pour $m < n$, des fonctions de n.

Notre fonction se réduit donc à une fonction rationnelle et entière de ρ et n, et le lieu des points pour lesquels elle a une valeur constante C sera représenté par l'équation

$$F(\rho, n) = C .$$

Ce lieu est donc constitué par *une ou plusieurs circonférences concentriques au polygone.* Le théorème B, dont A est un cas particulier, est ainsi démontré.

Le cas de plusieurs circonférences, dont nous donnons ci-dessous un exemple [1], ne peut pas se présenter dans le cas du théorème A.

En effet, on a

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cos^i \frac{\pi}{n} s_{m-i} \rho^{m-i} ;$$

dans le polynôme à droite les coefficients des puissances impaires de ρ pour $m < n$ sont nuls, et ceux des puissances paires sont des fonctions essentiellement positives de n, d'où il suit que l'équation en ρ

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h^m = \text{const.}$$

a tout au plus *une seule* racine positive.

---

1 Considérons pour $n = 5$, la fonction symétrique des d_h

$$f(d_h) = \sum_{h=0}^{4} d_h^4 - \frac{9}{20}\left[\sum_{h=0}^{4} d_h^2\right]^2 .$$

On trouve, en écrivant δ pour $\cos\frac{\pi}{5}$,

$$\sum_{h=0}^{4} d_h^4 = \frac{15}{8}\rho^4 + 15\,\delta^2\rho^2 + 5\delta^4 ,$$

$$\sum_{h=0}^{4} d_h^2 = \frac{5}{2}\rho^2 + 5\delta^2 .$$

Il en résulte

$$f(d_h) = -\frac{15}{16}\rho^4 + \frac{15}{4}\delta^2\rho^2 - \frac{25}{4}\delta^4$$

et l'équation

$$f(d_h) = -\frac{55}{16}\delta^4$$

a les racines $\rho^2 = \delta^2$, $\rho^2 = 3\delta^2$.

Il faut toutefois remarquer que le théorème A ne subsiste pas pour $m = 1$. Il résulte en effet

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = s_1 \rho + n \cos\frac{\pi}{n} = n \cos\frac{\pi}{n} ,$$

c'est-à-dire:

La somme (algébrique) des distances d'un point aux côtés d'un polygone régulier est constante pour tous les points du plan.

II. — Le théorème C.

Venons maintenant à la démonstration du théorème C.

Faisons passer l'axe des x par l'un des sommets du n-gone; les coordonnées des sommets seront alors

$$\cos\frac{2h\pi}{n} , \qquad \sin\frac{2h\pi}{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1) ,$$

et les carrés des distances du point (x, y) ou (ρ, φ) aux sommets seront

$$\begin{aligned} l_h^2 &= \left(x - \cos\frac{2h\pi}{n}\right)^2 + \left(y - \sin\frac{2h\pi}{n}\right)^2 \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho\left(x \cos\frac{2h\pi}{n} + y \sin\frac{2h\pi}{n}\right) \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(-\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) . \end{aligned}$$

Il s'en suit:

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i 2^i s_i \rho^i (\rho^2 + 1)^{m-i} .$$

Or, si $m < n$, toutes les sommes s_i d'indices impairs sont nulles et toutes celles d'indices pairs sont positives; il résulte que $\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m}$ est un polynôme en ρ à coefficients positifs et dépendant seulement de n. L'équation

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \text{const.} \qquad (m < n)$$