Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉNÉRALISATION DE LA PREMIÈRE FORMULE DE LA MOYENNE

Autor: Cioranescu, Nicolas

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28597

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LA GÉNÉRALISATION DE LA PREMIÈRE FORMULE DE LA MOYENNE

PAR

Nicolas CIORANESCU (Bucarest).

---

1. — Dans une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* [1] nous avons donné une généralisation de la première formule de la moyenne du Calcul intégral. Dans ce qui va suivre, nous donnons les compléments nécessaires à cette Note et envisageons une autre extension possible.

Considérons la *différence divisée d'ordre n* de la fonction $f(x)$ de variable réelle, que nous écrivons avec M. N. NÖRLUND sous la forme

$$[x_0, x_1 \dots x_n ; f]$$

et qui est définie par les relations de récurrence:

$$[x_0, x_1 \dots x_n ; f] = \frac{[x_1, x_2 \dots x_n ; f] - [x_0, x_1 \dots x_{n-1} ; f]}{x_n - x_0}$$

en posant

$$[x ; f] = f(x) .$$

Si l'on désigne par

$$V_{n+1}(x_0, x_1 \dots x_n) = \| 1\, x_k, x_k^2 \dots x_k^n \|$$

---

[1] Une généralisation de la première formule de moyenne et les polynomes de Tchebiceff. *C. R.*, t. 206, p. 1782, 1938.

le déterminant de Vandermonde d'ordre $n+1$ de quantités $x_0, x_1, \dots x_n$, et par

$$U_{n+1}(x_0, x_1 \dots x_n ; f) = \left\| 1\, x_k, x_k^2 \dots x_k^{n-1} f(x_k) \right\| ,$$

on a alors que:

$$[x_0, x_1 \dots x_n ; f] = \frac{U_{n+1}(x_0, x_1 \dots x_n ; f)}{V_{n+1}(x_0, x_1 \dots x_n)} . \tag{1}$$

Si l'on développe le déterminant $U_{n+1}(x_0, \dots x_n; f)$ d'après les éléments de la dernière colonne, on trouve que l'on peut encore écrire

$$[x_0, x_1 \dots x_n ; f] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} . \tag{2}$$

Si $x_0, x_1, \dots x_n$ sont les points d'un intervalle (a, b) dans lequel on suppose que la fonction $f(x)$ admet une dérivée finie d'ordre n, on a alors

$$[x_0, x_1 \dots x_n ; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} . \qquad a < \xi < b \tag{3}$$

2. — Soit $\varphi(x_0, x_1, \dots x_n)$ une fonction intégrable, non négative dans un domaine D_{n+1} de l'espace E_{n+1} des variables x_k, et $F(x_0, x_1, \dots x_n)$ une fonction continue dans ce domaine. On a alors, d'après la première formule de la moyenne,

$$\int_{D_{n+1}} \varphi(x_0, \dots x_n)\, F(x_0, \dots x_n)\, d\vartheta_{n+1} = F(P) \int_{D_{n+1}} \varphi(x_0, \dots x_n)\, d\vartheta_{n+1} , \tag{4}$$

$P(\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n)$ étant un point de D_{n+1}.

Remplaçons dans cette formule $F(x_0, x_1, \dots x_n)$ par $[x_0, x_1, \dots x_n; f]$ en supposant que $f(x)$ admet une dérivée finie d'ordre n. On en déduit alors de la formule (4) en tenant compte de la relation (3), la formule

$$\int_{D_{n+1}} \varphi(x_0, \dots x_n)\, [x_0, x_1 \dots x_n ; f]\, d\vartheta_{n+1} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_{D_{n+1}} \varphi(x_0, \dots x_n)\, d\vartheta_{n+1} . \tag{5}$$

Prenons comme domaine D_{n+1} le poly-intervalle Δ_{n+1} défini par

$$a \leqslant x_k \leqslant b \qquad (k = 0, 1, \dots n)$$

et pour fonction $\varphi(x_0, x_1, \dots x_n)$ la fonction

$$V^2_{n+1}(x_0, x_1, \dots x_n)\, p(x_0)\, p(x_1) \dots p(x_n) ,$$

$p(x)$ étant une fonction non négative dans (a, b). Alors la formule de moyenne (5) devient, en tenant compte de l'expression (2) de $[x_0, x_1 \dots x_n; f]$

$$\int_a^b \dots \int_a^b V^2_{n+1}\, p(x_0) \dots p(x_1) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1}) \dots (x_k - x_n)}\, d\varphi_{n+1} =$$

$$= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b V^2_{n+1}\, p(x_0) \dots p(x_n)\, d\varphi_{n+1} . \tag{6}$$

Ou bien, après la suppression des facteurs communs aux dénominateurs et à la fonction V^2_{n+1}, la formule (6) peut encore s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b p(x_k)\, f(x_k)\, dx_k \int_a^b \dots \int_a^b V^2_n(x_0, \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n)\, \varpi_k\, d\varphi_n^k =$$

$$= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b V^2_{n+1}\, p(x_0) \dots p(x_n)\, d\varphi_{n+1} , \tag{6'}$$

où l'on a posé

$$\varpi_k = (x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots$$
$$\dots (x_k - x_n)\, p(x_0) \dots p(x_{k-1})\, p(x_{k+1}) \dots p(x_n)$$

$$d\varphi_n^k = dx_0 \dots dx_{k-1}\, dx_{k+1} \dots dx_n .$$

Désignons par

$$\mathcal{P}_n(x_k) = \int_a^b \dots \int_a^b V^2_n(x_0, \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n)\, \varpi_k\, d\varphi_n^k . \tag{7}$$

On voit que $\mathcal{P}_n(x_k)$ est un polynôme de degré n en x_k, et que les divers polynômes $\mathcal{P}_n(x_0)$, $\mathcal{P}_n(x_1)$ ... $\mathcal{P}_n(x_n)$ sont, à un changement de variable près, identiques au polynôme

$$\mathcal{P}_n(x) = \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{V}_n^2(x_1, \ldots x_n)\, p(x_1) \ldots p(x_n)\,(x - x_1) \ldots \\ \ldots (x - x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \,. \qquad (7')$$

Par conséquent, tous les termes qui figurent dans la somme du premier membre de la relation (6′) sont, à un changement de variable près, identiques, et on peut écrire en définitive:

$$\int_a^b p(x)\, \mathcal{P}_n(x)\, f(x)\, dx = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)\,!} \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{V}_{n+1}^2\, p(x_0) \ldots p(x_n)\, d\varphi_{n+1} \,. \qquad (\mathrm{M})$$

C'est la formule que nous voulons signaler.

Les polynômes $\mathcal{P}_n(x)$ qui figurent dans cette formule sont les polynômes de Tchebiceff relatifs au poids $p(x)$ et à l'intervalle (a, b), comme on voit facilement en remplaçant, dans (M), $f(x)$ par un polynôme de degré $< n$.

On peut encore se débarrasser de l'intégrale multiple qui figure dans le second membre de (M).

Soit pour cela

$$\mathcal{P}_n(x) = a_n^0 x^n + \cdots ,$$

$$\int_a^b p(x)\, \mathcal{P}_n^2(x)\, dx = \mathcal{J}_n^2 ,$$

$$\int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{V}_{n+1}^2\, p(x_0) \ldots p(x_n)\, d\varphi_{n+1} = \mathrm{A}_{n+1} \,.$$

Si dans (M) on remplace $f(x)$ par $\mathcal{P}_n(x)$ on obtient

$$\int_a^b p(x)\, \mathcal{P}_n^2(x)\, dx = \frac{a_n^0}{n+1} \mathrm{A}_{n+1} = \mathcal{J}_n^2 ,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{A}_{n+1} = \frac{(n+1)}{a_n^0}\, \mathcal{J}_n^2$$

et par conséquent la formule (M) peut s'écrire

$$\int_a^b p(x)\, \mathcal{P}_n(x)\, f(x)\, dx = \frac{\mathcal{J}_n^2}{a_n^0} \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} .$$

Si, dans cette relation, on remplace $f(x)$ par x^n, on obtient

$$\frac{\mathcal{J}_n^2}{a_n^0} = \int_a^b p(x)\, \mathcal{P}_n(x)\, x^n\, dx ,$$

de sorte que l'on peut écrire finalement

$$\int_a^b p(x)\, \mathcal{P}_n(x)\, f(x)\, dx = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_a^b p(x)\, \mathcal{P}_n(x)\, x^n\, dx . \qquad (\mathrm{M}')$$

Pour $n = 0$ on retrouve la formule classique de la moyenne. On voit de cette formule qu'il n'est pas nécessaire que les polynômes $\mathcal{P}_n(x)$ soient normalisés.

3. — *Applications.* — *a*) Supposons $p(x) = 1$. Alors les polynômes $\mathcal{P}_n(x)$ sont les polynômes $X_n(x)$ de Legendre. La formule (M′) donne dans ce cas

$$\int_a^b X_n(x)\, f(x)\, dx = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_a^b X_n(x)\, x^n\, dx =$$

$$= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \frac{1}{n!\,(b-a)^n} \int_a^b x^n \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n (x-b)^n\right] dx .$$

En intégrant par parties on trouve en définitif

$$\int_a^b X_n(x)\, f(x)\, dx = \frac{n!}{(2n+1)!} (b-a)^{n+1} f^{(n)}(\xi) . \qquad (8)$$

b) En général, on sait que les polynômes $\mathcal{P}_n(x)$ peuvent être représentés comme dérivées d'ordre n

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{n!\,(b-a)^n} \frac{1}{p(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n (x-b)^n \varphi_n(x)\right] ,$$

$\varphi_n(x)$ étant une fonction caractéristique de la classe, comme $p(x)$. A l'aide de cette expression de $\mathfrak{T}_n(x)$ on peut obtenir une nouvelle démonstration de la formule (M) en intégrant par parties et appliquant la formule ordinaire de la moyenne.

c) La formule (M′) est valable même pour un intervalle infini. Ainsi, on a lorsque $a = 0$, $b = \infty$, $p(x) = x^\alpha e^{-x}$, les polynômes correspondants étant les polynômes de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$, la formule

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) f(x)\, dx = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x)\, dx =$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} f^{(n)}(\xi) .$$

Et, lorsque $a = -\infty$, $b = +\infty$, $p(x) = e^{-x^2}$, c'est-à-dire pour les polynômes $H_n(x)$ d'Hermite, on a la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) f(x)\, dx = (-1)^n \sqrt{\pi}\, f^{(n)}(\xi) .$$

4. — De la formule (M′), valable pour les fonctions $f(x)$ données de dérivées d'ordre n, on peut déduire inversement une définition de la dérivée d'ordre n d'une fonction, à l'aide des intégrales, savoir

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{a+h} p(x)\, \mathfrak{T}_n(x) f(x)\, dx}{\int_a^{a+h} p(x)\, \mathfrak{T}_n(x)\, x^n\, dx} , \tag{9}$$

$\mathfrak{T}_n(x)$ étant le polynôme de Tchebiceff relatif à l'intervalle $(a, a+h)$ et au poids $p(x)$.

En particulier on a

$$f'(x) = 6 \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h (2t - h) f(x+t)\, dt}{h^3} , \tag{9'}$$

en prenant le polynôme $X_1(x)$ de Legendre.

Nous n'insistons pas ici sur les conséquences qu'on peut tirer de cette définition de la dérivée.

5. — Lorsqu'on suppose la fonction $f(x)$ appartenant à la classe des fonctions indéfiniment dérivables dans (a, b), on peut présenter la formule (9′) sous un autre aspect.

Soit

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} f_n \mathcal{P}_n(x) \tag{10}$$

le développement de $f(x)$ en série de polynômes Tchebiceff, qui forment une suite orthogonale et normale relative à la fonction non négative $p(x)$ dans (a, b).

On a alors pour les coefficients Fourier f_n de $f(x)$ les expressions

$$f_n = \int_a^b p(x) \mathcal{P}_n(x) f(x)\, dx \ . \tag{11}$$

Mais, en tenant compte de la formule (M′), il en résulte que ces coefficients peuvent encore être écrits sous la forme

$$f_n = c_n \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}, \qquad a < \xi_n < b \tag{11′}$$

c_n étant une suite des constantes indépendantes de $f(x)$,

$$c_n = \int_a^b p(x) \mathcal{P}_n(x) x^n\, dx \neq 0$$

caractéristique pour la suite $\mathcal{P}_n(x)$.

(Si la suite $\mathcal{P}_n(x)$ est normalisée, on a $c_n = \frac{1}{a_n^0}$, où a_n^0 est le coefficient de x^n dans l'expression de $\mathcal{P}_n(x)$.)

Par conséquent, pour la classe considérée de fonctions, le développement (10) peut s'écrire

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} c_n \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} \mathcal{P}_n(x) \tag{10′}$$

et ce développement constitue une généralisation de la formule de Taylor valable pour les fonctions analytiques autour d'un point a.

6. — Considérons en particulier le cas $p(x) = 1$, c'est-à-dire le développement de $f(x)$ en série de polynômes de Legendre. En tenant compte de la formule (8), le développement (10′) devient

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} (b-a)^n f^{(n)}(\xi_n) \, X_n(x) \ , \qquad (10'')$$

$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ étant une certaine suite de valeurs appartenant à l'intervalle (a, b).

Si l'on suppose, en outre, que les fonctions $f(x)$ satisfont dans l'intervalle (a, b) aux conditions

$$|f^{(n)}(x)| < A_n \cdot k^n \ , \qquad (12)$$

A_n étant une certaine suite numérique positive, caractéristique de la classe envisagée, comme on a

$$|X_n(x)| \leqslant 1$$

pour tout x appartenant à (a, b), il en résulte que si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \, A_n}{(2n)!} k^n (b-a)^n$$

est convergente pour un $k > 0$, le développement de $f(x)$ en série de polynômes de Legendre est alors absolument convergent. Pour cela il suffit que l'on ait

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} \sqrt[n]{A_n} = \lambda < \infty \ .$$

Mais cette condition veut dire que les deux séries

$$\sum \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} \ , \qquad \sum \sqrt[n]{A_n}$$

ont la même nature. Or la première est divergente, comme il est facile de voir, donc il en est de même de la seconde, ce qui veut dire, d'après la proposition bien connue de M. A. Denjoy, que les fonctions $f(x)$ appartenant à la classe définie par la rela-

tion (12) et ayant le développement en série de polynômes Legendre absolument convergent, sont des fonctions quasi-analytiques.

7. — La formule (M) n'est pas la seule formule de moyenne qu'on peut obtenir à l'aide de la méthode du § 1. Nous considérons ici encore un exemple.

Prenons dans la formule (5)

$$\varphi(x_0, x_1 \dots x_n) = V_{n+1}^2(x_0, x_1 \dots x_n)\, p_0(x_0)\, p_1(x_1) \dots p_n(x_n) ,$$

$p_k(x_k)$ étant une fonction non négative dans (a, b). On obtient alors la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x_k)\, f(x_k)\, dx_k \int_a^b \dots$$

$$\dots \int_a^b V_n^2(x_0, \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n)\, \varpi_k\, d\sigma_n^k = c_n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} ,$$

où

$$c_n = \int_a^b \dots \int_a^b V_{n+1}^2\, p_0(x_0)\, p_1(x_1) \dots p_n(x_n)\, d\sigma_{n+1}$$

et

$$\varpi_k = (x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots$$

$$\dots (x_k - x_n)\, p_0(x_0) \dots p_{k-1}(x_{k-1})\, p_{k+1}(x_{k+1}) \dots p_n(x_n) .$$

Si l'on désigne par $\mathcal{P}_{nk}(x_k)$ le polynôme

$$\mathcal{P}_{nk}(x_k) = \int_a^b \dots \int_a^b V_n^2(x_0, \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n)\, \varpi_k\, d\sigma_n^k ,$$

$$(k = 0, 1, \dots n)$$

on a alors la formule

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, \mathcal{P}_{nk}(x) \right) f(x)\, dx = c_n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} , \tag{13}$$

ou bien, si l'on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, \mathfrak{P}_{nk}(x) \tag{14}$$

qui est une fonction bien déterminée lorsque les fonctions $p_k(x)$ sont données, la formule (13) devient

$$\int_a^b S_n(x)\, f(x)\, dx = c_n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} . \tag{13'}$$

On peut, de la même manière, trouver l'expression de c_n qui ne dépend pas de $f(x)$, en faisant dans (13') $f(x) = x^n$, de sorte que l'on peut écrire en définitive

$$\int_a^b S_n(x)\, f(x)\, dx = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_a^b x^n\, S_n(x)\, dx . \tag{M$_1$}$$

Cette formule généralise la formule (M'). Les polynômes $\mathfrak{P}_{nk}(x)$ ne sont plus les polynômes de Tchebiceff. Ils se présentent comme la valeur moyenne des polynômes de degré n dont toutes les racines (réelles) se trouvent dans le domaine Δ_n: $a \leqslant x_k \leqslant b$ et cette valeur moyenne est prise avec un poids non négatif, nul seulement lorsque deux ou plusieurs racines coïncident.

Sur la fonction $S_n(x)$ on peut dire seulement qu'elle a n racines réelles dans (a, b), car si elle n'en avait que $m < n$, alors on pourrait trouver un polynôme de degré m tel que son produit par $S_n(x)$ garde un signe constant dans (a, b), et en prenant $f(x)$ égal à ce polynôme, on devrait avoir d'après (13')

$$\int_a^b S_n(x)\, f(x)\, dx = 0 ,$$

ce qui ne serait pas possible. On a par conséquent les relations

$$\int_a^b S_n(x)\, x^m\, dx = 0 . \qquad (m = 0, 1, \ldots n-1)$$

On a ainsi une sorte de généralisation de la notion d'orthogonalité. Un cas particulier intéressant serait celui dans lequel le nombre des fonctions $p_k(x)$ distinctes serait un nombre indépendant de n (2, 3, etc.).

La formule (M_1) ne s'explique plus maintenant par le fait que $S_n(x)$ serait, comme $p(x)\mathcal{P}_n(x)$ dans le cas de la formule (M') une dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction qui s'annule ainsi que ses $n-1$ dérivées pour $x = a$, $x = b$, donc réductible en somme à la formule ordinaire de la moyenne.

Mais nous ne voulons plus insister davantage sur les divers problèmes qui peuvent être rattachées à ces formules.

LES CARRÉS MAGIQUES DE FRANKLIN[1]

PAR

Derrick N. LEHMER (Berkeley, Californie).

Dans une lettre à Peter Collinson, de date incertaine, mais écrite probablement dans le courant de 1749, Benjamin FRANKLIN[2] décrit une méthode permettant de construire des carrés magiques d'ordre pair, et illustre sa méthode à l'aide de deux carrés, l'un d'ordre 8 et l'autre d'ordre 16.

Ces carrés se distinguent par le fait qu'ils présentent la magie non seulement des rangées et des colonnes, mais aussi celle des lignes qu'il appelle *bent diagonals*, diagonales pliées ou *chevrons* (fig. 1): c'est-à-dire que la somme des termes d'une demi-diagonale quelconque, plus la somme de ceux de la demi-diagonale symétrique par rapport à une médiane du carré, est égale à la constante magique C du carré. Cela donne six séries de lignes

---

[1] Traduit de l'anglais par M. J.-P. DUMUR (Genève). — Le général CAZALAS, auteur de nombreuses contributions à l'étude des carrés magiques, a bien voulu revoir le texte français de cet article. Je tiens à lui réitérer ici ma vive gratitude. — D. N. LEHMER.

[2] *Œuvres*, éditées par Bigelow, vol. II, p. 156.