Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CARRÉS MAGIQUES DE FRANKLIN
Autor: Lehmer, Derrick N.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28598

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

On a ainsi une sorte de généralisation de la notion d'orthogonalité. Un cas particulier intéressant serait celui dans lequel le nombre des fonctions $p_k(x)$ distinctes serait un nombre indépendant de n (2, 3, etc.).

La formule (M_1) ne s'explique plus maintenant par le fait que $S_n(x)$ serait, comme $p(x)\,\mathfrak{P}_n(x)$ dans le cas de la formule (M') une dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction qui s'annule ainsi que ses $n - 1$ dérivées pour $x = a$, $x = b$, donc réductible en somme à la formule ordinaire de la moyenne.

Mais nous ne voulons plus insister davantage sur les divers problèmes qui peuvent être rattachées à ces formules.

LES CARRÉS MAGIQUES DE FRANKLIN [1]

PAR

Derrick N. LEHMER (Berkeley, Californie).

Dans une lettre à Peter Collinson, de date incertaine, mais écrite probablement dans le courant de 1749, Benjamin FRANKLIN [2] décrit une méthode permettant de construire des carrés magiques d'ordre pair, et illustre sa méthode à l'aide de deux carrés, l'un d'ordre 8 et l'autre d'ordre 16.

Ces carrés se distinguent par le fait qu'ils présentent la magie non seulement des rangées et des colonnes, mais aussi celle des lignes qu'il appelle *bent diagonals*, diagonales pliées ou *chevrons* (fig. 1): c'est-à-dire que la somme des termes d'une demi-diagonale quelconque, plus la somme de ceux de la demi-diagonale symétrique par rapport à une médiane du carré, est égale à la constante magique C du carré. Cela donne six séries de lignes

---

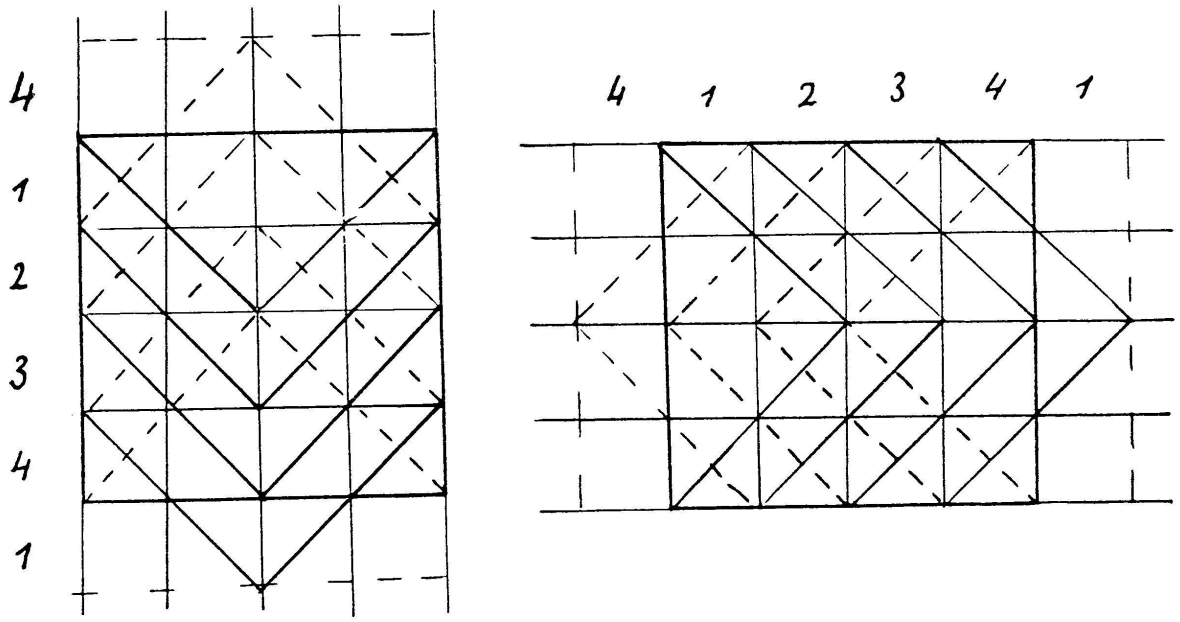
[1] Traduit de l'anglais par M. J.-P. DUMUR (Genève). — Le général CAZALAS, auteur de nombreuses contributions à l'étude des carrés magiques, a bien voulu revoir le texte français de cet article. Je tiens à lui réitérer ici ma vive gratitude. — D. N. LEHMER.

[2] *Œuvres*, éditées par Bigelow, vol. II, p. 156.

parallèles fournissant la constante magique, au lieu de quatre comme dans les carrés diaboliques. Ces carrés ont aussi la remarquable propriété d'être *à grille* [1]: c'est-à-dire que la somme des quatre termes d'un compartiment 2 × 2, pris n'importe où sur le carré, est constante.

La méthode de Franklin pour construire ces carrés ne semble pas avoir été clairement comprise. ANDREWS, dans son livre sur les *Carrés et les Cubes magiques* (Open Court, 1908), leur consacre un chapitre, où il en donne une analyse très compliquée. Sa méthode d'analyse ne s'applique pas à des carrés d'autres ordres que ceux donnés par Franklin, et il confesse à la fin du chapitre: « Nous ne connaissons pas la méthode employée par Franklin; nous possédons seulement le résultat, mais il n'est pas probable qu'il ait construit son carré suivant le procédé qui est employé ici ».

Le but de cet article est de faire entrer les carrés de Franklin dans une théorie unifiée, et d'indiquer comment de tels carrés



1re série. 2me série.

Chevrons.

Schémas pour un carré d'ordre 4.

Fig. 1.

1 L'auteur les dénomme *Magic im Kleinen*. expression bilingue, abréviative et intraduisible sans périphrase, mais par laquelle il désigne exactement une sorte de *carré à grille*. Un carton percé d'une ouverture (grille) de la dimension d'un compartiment 2 × 2, placé n'importe où sur le carré, découvre toujours quatre termes à somme constante. *(N. d. T.)*

peuvent être construits pour un ordre pair quelconque. L'auteur se croit fondé à penser que la méthode ici développée était celle utilisée par l'ingénieux philosophe, dont le bagage mathématique était insuffisant pour qu'il pût s'attaquer au problème consistant à l'appliquer à des carrés d'ordres non multiples de 8.

Franklin divise ses carrés en trois bandes horizontales, la bande du milieu contenant deux fois autant de rangées que les bandes extérieures. Sa méthode de placer les nombres successifs est alors très simple et évidente [1]. Il part avec l'unité dans l'une quelconque des cases de la rangée au bas du carré et monte en suivant une route en zigzag à travers les première et troisième bandes, puis il saute directement à la rangée supérieure de la seconde bande et descend par une route en zigzag jusqu'à la rangée inférieure de cette seconde bande. Puis, se déplaçant d'une case à gauche, il chemine par un zigzag analogue à travers la seconde bande et saute directement à la rangée supérieure de la troisième. De là, il descend de nouveau en zigzag à travers la troisième et la première bande jusqu'à la rangée du bas, en aboutissant à gauche de la case initiale avec le nombre $4n$, dans un carré d'ordre $2n$. Ainsi s'achève ce que nous appellerons la *première excursion.*

La seconde excursion débute par la case, qui se trouve à la gauche de celle qui termine la première et suit une route analogue, avec de plus larges zigzags, les termes de la seconde excursion étant placés alternativement à la gauche et à la droite de ceux de la première déjà en place. On répétera ce simple procédé jusqu'à ce que le carré soit rempli, en convenant, comme d'habitude, que la dernière colonne de gauche est suivie (à gauche) par la première de droite. Ce procédé fournira, comme nous le verrons, un carré magique du type de Franklin, *pour tout carré dont l'ordre est un multiple de* 8.

Le choix de la case initiale sur la rangée du bas est arbitraire. Deux choix différents produiront des carrés, qui ne diffèrent que par une permutation circulaire des colonnes. De plus, la méthode qui consiste à diviser le carré en trois bandes horizontales n'est pas essentielle. Nous avons démontré, en effet, que si une méthode

[1] Voir figure 2, en suivant l'ordre naturel des nombres. *(N. d. T.)*

quelconque de division du carré en bandes horizontales produit un carré magique, le carré qui résulte de toute autre méthode de division est magique ou peut être rendu tel, en renversant l'ordre des éléments dans certaines des rangées. Nous pouvons donc nous borner, sans que la généralité en souffre, à une division en n bandes, avec deux rangées dans chaque bande et, pour la symétrie, nous choisirons pour la case initiale la $n^{ème}$ case de la rangée du bas, en comptant de la gauche. Nous reproduisons ici (fig. 2) le carré de Franklin d'ordre 8 et le même carré modifié (fig. 3), comme on vient de l'indiquer, C = 260:

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Fig. 2.

37	44	53	60	5	12	21	28
27	22	11	6	59	54	43	38
36	45	52	61	4	13	20	29
30	19	14	3	62	51	46	35
39	42	55	58	7	10	23	26
25	24	9	8	57	56	41	40
34	47	50	63	2	15	18	31
32	17	16	1	64	49	48	33

Fig. 3.

Si nous essayons d'appliquer cette méthode à un carré d'ordre 6, nous obtenons la figure 4.

21	28	33	4	9	16
15	10	3	34	27	22
20	29	32	5	8	17
18	7	6	31	30	19
23	26	35	2	11	14
13	12	1	36	25	24

Fig. 4.

On voit que dans ce carré les rangées sont magiques C = 111, mais pas les colonnes. Les colonnes impaires donnent la somme 110, tandis que les colonnes paires donnent 112. Il est aussi à

grille et on retrouve la constante 111 dans la « première série de chevrons », c'est-à-dire dans les demi-diagonales et leurs symétriques par rapport à la médiane verticale du carré. Les chevrons de la « seconde série », c'est-à-dire les demi-diagonales et leurs symétriques par rapport à la médiane horizontale du carré, ont des valeurs alternativement trop grandes et trop petites de 3. Ce sont, sans doute, ces différences qui déroutèrent B. Franklin dans sa tentative de construire un carré de ce genre d'ordre 6.

On notera toutefois que les termes adjacents dans la troisième rangée [1] diffèrent d'une unité et qu'un simple échange de ces derniers rectifiera les sommes dans les colonnes, en les rendant magiques. Cet ajustement n'altère pas la propriété de la grille ni la magie de la première série de chevrons. Il laisse encore imparfaite la seconde série de chevrons.

Nous montrerons qu'*à l'exception des carrés d'ordre* 4 *et* 6, *il est possible de faire de nouveaux ajustements, dans un carré d'un ordre pair quelconque, de façon à réaliser la magie des rangées et des colonnes, et celle des deux séries de chevrons, tout en conservant la grille.*

On voit facilement que les deux nombres placés dans une quelconque des rangées lors de la première excursion sont de la forme $2n - k$ et $2n + k + 1$. De même, la seconde excursion dépose dans cette même rangée les deux nombres $6n - k$ et $6n + k + 1$, et ainsi de suite pour les excursions successives. Nous avons donc le théorème:

THÉORÈME I: *Les nombres d'une rangée quelconque forment deux progressions arithmétiques de raison* 4n *et de termes initiaux* 2n — k *et* 2n + k + 1.

Nous nommerons la r^{me} excursion et la $(n - r + 1)^{\text{me}}$ excursion *excursions conjuguées*. Il est clair également que le carré pourrait aussi bien être construit en commençant par la dernière excursion et en renversant l'ordre des nombres. On voit que les termes, placés dans une rangée quelconque par la r^{me} excursion (faite dans l'ordre naturel), sont $(4r - 2)n - k$ et $(4r - 2)n$

[1] Les rangées et les bandes sont toujours comptées à partir du bas et les colonnes à partir de la gauche. *(N. d. T.)*

$+ k + 1$, tandis que ceux qui sont placés dans la même rangée par l'excursion conjuguée sont $4n^2 + 1 - [(4r - 2)\, n - k]$ et $4n^2 + 1 - [(4r - 2)\, n + k + 1]$. De là découle le théorème fondamental:

THÉORÈME II: *Les nombres correspondants de deux excursions conjuguées ont une somme égale à* $4n^2 + 1$.

Comme il y a n paires de ce genre dans chaque rangée, nous avons le

THÉORÈME III: *La somme des termes de chaque rangée est égale à* $n(4n^2 + 1)$ *et par conséquent les rangées d'un carré de Franklin sont toujours magiques.*

C'est en réalité un cas spécial du théorème plus général, concernant la magie de la première série de chevrons, savoir:

THÉORÈME IV: *La somme de* n *termes quelconques pris dans la moitié de droite du carré, augmentée de la somme de ceux qui leur sont symétriques dans la moitié de gauche, est égale à la constante magique* $n(4n^2 + 1)$.

Pour expliquer la propriété de la grille, nous observons d'abord que la somme des deux nombres placés dans une rangée par la première excursion est $4n + 1$ et cela pour toutes les rangées. Ensuite, comme conséquence de la marche en zigzag, aucune paire, dans une rangée quelconque, ne se trouvera placée directement au-dessous ou au-dessus d'une paire dans la rangée adjacente. Ainsi, les nombres placés par la dernière excursion sont intercalés parmi ceux de la première, de façon à remplir les quatre colonnes centrales. Mais les deux nombres placés dans une rangée quelconque par la dernière excursion ont aussi une somme constante $8n^2 - 4n + 1$, et si on les ajoute aux deux nombres de la première excursion placés au-dessus ou au-dessous d'eux, on obtient quatre nombres, dont la somme est $8n^2 + 2$.

En outre, dans deux rangées adjacentes, les termes des progressions arithmétiques augmentent, dans l'une vers la droite et dans l'autre vers la gauche, de sorte qu'en passant d'un compartiment 2×2 à son voisin sur les mêmes rangées, les deux nouveaux termes introduits dans le compartiment ont une

somme égale à celle des deux qui en sont sortis, l'un se trouvant augmenté et l'autre diminué de $4n$ par rapport à ces derniers. Cela prouve la propriété de la grille, qui se traduit comme suit:

THÉORÈME V: *Dans un carré de Franklin, la somme des quatre termes situés dans un compartiment* 2×2 *est constante et égale à* $8n^2 + 2$.

De la propriété ci-dessus on déduit facilement que tous les déterminants mineurs d'ordre $m \geqslant 4$ du déterminant formé par les éléments d'un carré de Franklin d'ordre $2n$ sont nuls.

On peut aussi démontrer que le déterminant d'ordre 3, qui se trouve placé au bas des $(n-1)^{\text{me}}$, n^{me} et $(n+1)^{\text{me}}$ colonnes, est égal à $8n(n-1)(4n^2+1)$, expression qui n'est jamais nulle pour des valeurs entières positives de n plus grandes que l'unité. Nous avons donc le théorème suivant:

THÉORÈME VI: *Le rang*[1] *du déterminant formé par les éléments d'un carré de Franklin est* 3.

Il faut noter que ce théorème n'est pas vrai pour les carrés magiques en général. Ainsi le déterminant du carré suivant,

3	14	9	8
4	2	13	15
11	6	7	10
16	12	5	1

qui n'est pas un carré de Franklin et qu'on ne peut pas déduire d'un carré de Franklin à l'aide de permutations des rangées ou des colonnes, est de rang 4. (Voir une note sur les déterminants par C.O. OAKLEY dans *American Mathematical Monthly*, décembre 1932.)

La méthode de construction des carrés de Franklin, que l'on vient d'exposer, peut être appliquée à un rectangle aussi bien qu'à un carré, et tous les théorèmes développés jusqu'à présent sont valables, à cette exception près naturellement que la

[1] Le *rang* d'un déterminant se définit comme suit: Si les mineurs d'ordre r ne sont pas tous nuls, les mineurs d'ordre $r+1$ étant nuls, le déterminant sera dit de rang r.

constante magique des rangées est différente de celle des colonnes. Le rang des matrices ainsi obtenues sera également 3.

Les deux termes de la première bande dans la n^me colonne sont 1 et $4n^2 - 1$ dont la somme est $4n^2$. On aura la même somme pour les deux termes d'une bande quelconque d'ordre impair, représentés par k et $4n^2 - k$. Les deux termes de la seconde bande dans la n^me colonne sont $2n$ et $4n^2 - 2n + 2$, dont la somme est $4n^2 + 2$. Cette somme est encore la même pour une bande quelconque d'ordre pair. Par conséquent, la somme de tous les termes de la n^me colonne est $4n^2$ X + $(4n^2 + 2)$ Y, où X est le nombre de bandes d'ordre impair et Y celui de bandes d'ordre pair.

Si le carré est d'ordre *pairement pair*, il y aura autant de bandes d'ordre impair que d'ordre pair, soit $n/2$; la somme des termes de la n^me colonne sera, dans ce cas, $n\,(4n^2 + 1)$ et cette colonne sera magique. De la propriété de la grille, on déduit facilement alors que toutes les colonnes sont magiques.

Si le carré est d'ordre *impairement pair*, il y aura $(n + 1)/2$ bandes d'ordre impair et $(n - 1)/2$ d'ordre pair et la somme des termes de la n^me colonne sera $n\,(4n^2 + 1) - 1$. En vertu de la propriété de la grille, les colonnes adjacentes doivent donner la somme $n\,(4n^2 + 1) + 1$; donc toutes les colonnes d'ordre pair ont une somme trop grande d'une unité et celles d'ordre impair une trop petite d'une unité. Nous avons donc le théorème:

THÉORÈME VII: *Dans le carré de Franklin d'ordre* 2n, *les colonnes sont magiques si* n *est pair. Si* n *est impair, la somme des termes des colonnes est alternativement trop petite et trop grande d'une unité pour être magique.*

Les termes d'une rangée quelconque sont alternativement impairs et pairs. Par conséquent, la somme des deux termes d'un chevron quelconque de la seconde série, qui sont situés dans la même colonne, est paire, si n est impair, et la somme de tous les termes de ce chevron est paire. Mais la constante magique $n\,(4n^2 + 1)$ est impaire, si n l'est. Par suite:

THÉORÈME VIII: *Dans le carré de Franklin la seconde série de chevrons n'est jamais magique, si l'ordre est impairement pair.*

Mais dans les carrés de Franklin pairement pairs la seconde série de chevrons n'est pas toujours magique. Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME IX: *L'ordre d'un carré de Franklin doit être un multiple de* 8 *pour que la seconde série de chevrons soit magique.*

Pour le prouver, nous remarquerons que, dans un carré impairement pair, la bande supérieure est d'ordre impair et contient dans l'ordre ascendant les nombres n et $n + 1$ (voir fig. 5). Dans un carré pairement pair (voir fig. 3), la bande supérieure est d'ordre pair et contient dans l'ordre descendant les nombres $n + 1$ et $n + 2$.

Une étude des termes, placés dans la n^{me} colonne par la première et la dernière excursions, montre que, dans un carré pairement pair, la somme de deux termes quelconques symétriques par rapport à la médiane horizontale est $4n^2 + n + 1$ ou $4n^2 - n + 1$. On doit prendre le signe *plus* pour la somme de deux termes situés dans la k^{me} et la $(2n - k + 1)^{me}$ rangées, si k se réfère à la rangée supérieure d'une bande impaire ou à la rangée inférieure d'une bande paire. On prendra le signe *moins*, lorsque la k^{me} rangée est la rangée inférieure d'une bande impaire ou la rangée supérieure d'une bande paire. Pour la $(n + 1)^{me}$ colonne, les signes doivent être permutés.

De plus, si les termes dans la k^{me} rangée augmentent de droite à gauche, ils augmentent de gauche à droite dans la $(2n - k + 1)^{me}$. Il en résulte que deux termes quelconques du carré, symétriquement placés par rapport à la médiane horizontale, doivent avoir une somme égale à $4n^2 + n + 1$ ou $4n^2 - n + 1$.

Considérons, pour simplifier, le chevron principal de gauche de la seconde série, c'est-à-dire celui qui commence au coin supérieur gauche et se termine au coin inférieur gauche. Pour ses termes situés dans la première et la seconde colonne de gauche, nous obtenons dans chaque colonne la somme $4n^2 + n + 1$; puis deux sommes $4n^2 - n + 1$, suivies par deux sommes $4n^2 + n + 1$, et ainsi de suite alternativement.

Il y aura en tout n sommes des deux sortes et, si n est un multiple de 4, il y aura $n/2$ paires de termes ayant la première

somme et $n/2$ paires ayant la seconde: le total donnera la constante magique $n(4n^2 + 1)$. Si n pair n'est pas un multiple de 4, il y aura $n/2 + 1$ sommes de la première sorte et $n/2 - 1$ sommes de la seconde et l'on trouvera un total trop grand de n pour que le chevron principal de la seconde série soit magique. Le chevron suivant à droite sera alors trop petit de n, et ainsi de suite alternativement. Ces résultats peuvent être résumés par le théorème suivant:

THÉORÈME X: *Dans le carré de Franklin les rangées et la première série de chevrons sont magiques et il est à grille, pour tous les ordres. Si son ordre est un multiple de* 4, *les colonnes sont aussi magiques. Si son ordre est un multiple de* 8, *la seconde série de chevrons est également magique.*

AJUSTEMENTS.

Un carré, dont les rangées et les colonnes sont magiques, reste magique après une permutation quelconque des rangées ou des colonnes. Si toutefois nous désirons conserver la propriété de la grille, nous devons restreindre ces permutations. On voit facilement que:

THÉORÈME XI: *Les seules permutations, effectuées sur les lignes d'un carré magique, qui n'altèrent pas la propriété de la grille, sont celles qui échangent entre elles les rangées ou colonnes pairès et les rangées ou colonnes impaires.*

Nous considérerons d'abord l'effet de telles transformations sur les chevrons de la première série. Soient E et F deux termes, qui sont situés sur le même chevron de la première série. S'ils sont dans la même rangée, il est clair que les colonnes dans lesquelles ils se trouvent peuvent être échangées, sans que la somme des termes de ce chevron en soit modifiée. S'ils sont dans des rangées différentes, ils sont alors les coins opposés d'un rectangle, et nous appellerons les deux autres coins E′ et F′. On voit alors que l'échange des colonnes, dans lesquelles E et F se trouvent, leur substituera les nombres E′ et F′ dans le chevron, dont la somme des termes sera modifiée de la *différence en croix* $E + F - (E' + F')$. Si cette différence est nulle, la

somme des termes du chevron ne sera naturellement pas altérée par l'échange de ces deux colonnes. Nous allons maintenant démontrer le théorème fondamental qui suit:

THÉORÈME XII: *La condition nécessaire et suffisante pour que la différence en croix, entre les termes des coins d'un rectangle quelconque soit nulle, est qu'il comprenne un nombre impair de rangées et de colonnes.*

Pour prouver que la condition est suffisante, considérons un rectangle quelconque ayant un nombre impair de rangées et de colonnes. Les côtés supérieurs et inférieurs sont alors tous deux dans des rangées impaires ou tous deux dans des rangées paires, et comme les nombres de ces rangées croissent dans la même direction, alternativement en deux progressions arithmétiques de raison $4n$, les termes supérieurs du rectangle, ainsi que les inférieurs, diffèrent entre eux d'un même multiple de $4n$. Les quatre termes des coins du rectangle peuvent donc être désignés par E, $E + 4kn$ et E', $E' + 4kn$. La différence en croix est évidemment zéro et la condition est suffisante.

Supposons maintenant qu'il y ait un nombre pair de rangées, et soient E et F les termes supérieurs, E' et F' les inférieurs. Puisque les nombres croissent dans des directions opposées sur les côtés supérieur et inférieur du rectangle, E et F' sont tous deux plus grands ou tous deux plus petits que E' et F et la différence en croix n'est par conséquent pas nulle.

Supposons qu'il y ait un nombre pair de colonnes et un nombre impair de rangées. La différence en croix pour ce rectangle sera la même que pour tout rectangle ayant les mêmes rangées et seulement deux colonnes, obtenues en déplaçant ses côtés latéraux d'un nombre pair de colonnes, parce que ce déplacement augmente (ou diminue) les deux termes d'un côté d'un même multiple de $4n$, qui disparaîtra dans la différence en croix.

Nous pouvons alors considérer la différence en croix des termes d'un rectangle à deux colonnes, dont les éléments inférieurs appartiennent à la même excursion et, comme le nombre des rangées est impair, les éléments supérieurs appartiendront à cette même excursion. Les quatre éléments peuvent alors être

désignés par k, $2\alpha n - k + 1$ et k', $2\alpha n - k' + 1$, et l'on voit que la différence en croix est $2(k - k')$, qui n'est pas égal à zéro. Un rectangle, qui a un nombre impair de rangées et un nombre pair de colonnes ne peut pas avoir une différence en croix nulle.

De ce résultat nous déduisons sans difficulté le théorème suivant:

THÉORÈME XIII: *Deux colonnes quelconques, toutes deux de rang pair ou toutes deux de rang impair, peuvent être permutées, sans que la magie de la première série de chevrons soit troublée, si elles sont situées toutes deux du même côté de la médiane verticale du carré.*

Comme nous l'avons vu, le carré de Franklin présente toujours la magie dans les rangées et dans la première série de chevrons, et il est à grille. Un ajustement quelconque pour rendre magique la seconde série de chevrons ne doit pas modifier ces propriétés. Cela signifie que, pour qu'il soit permis d'échanger deux colonnes, il faut qu'elles soient toutes deux de rang pair, ou bien de rang impair, et du même côté de la médiane verticale. Mais de telles transformations, étant associées à une différence en croix nulle, ne produiront aucun changement dans les sommes de la seconde série de chevrons. Il est par conséquent inutile de rechercher des ajustements de la seconde série par des permutations quelconques de colonnes.

C'est pourquoi nous allons étudier l'effet des permutations de rangées, et pour conserver la propriété de la grille, nous devons permuter les rangées paires entre elles et les rangées impaires entre elles. La discussion et les résultats finals dépendent de la forme de l'ordre du carré par rapport au module 8. Nous considérerons les quatre cas, où l'ordre est $2n$, avec $n = 4r + 1$, $4r + 2$, $4r + 3$ et $4r + 4$.

Premier cas. $n = 4r + 1$. — Ici, l'ordre est impairement pair et les colonnes ne sont pas magiques. Mais comme nous l'avons vu, on y remédie facilement en permutant les éléments de la troisième rangée, qui appartiennent à la même excursion. Cela n'altère pas la magie des rangées, ni celle de la première série de chevrons, ni la propriété de la grille. On voit facilement que cela

diminue d'une unité les sommes des termes des chevrons impairs de la deuxième série et augmente les pairs de la même quantité [1].

Après avoir fait cet ajustement, il reste à rendre magiques les chevrons de la seconde série par des permutations de rangées paires ou de rangées impaires, ou par les deux. L'effet de ces permutations sur les sommes des termes des chevrons est mesuré par les différences en croix et celles-ci sont de la forme $2(k - k')$, où k et k' sont deux éléments quelconques de la première excursion, situés dans la même colonne. Il faut donc trouver deux éléments tels que $2(k - k') = n - 1$. On y arrive facilement, car nous pouvons prendre $k = n$ et $k' = (n + 1)/2$, puisque dans ce cas k et k' seront impairs tous les deux et par suite sont situés les deux dans la n^{me} colonne. Nous avons donc l'ajustement simple suivant:

THÉORÈME XIV: *Si l'ordre du carré de Franklin est* $2n$, *où* $n = 4r + 1$, *une permutation des éléments de la troisième rangée, qui appartiennent à la même excursion, suivie d'une permutation de la* n^{me} *rangée avec la* $(2n - 1)^1$, *qui est immédiatement au-dessous de la rangée supérieure, rendra le carré parfaitement magique.*

Le plus petit carré de cet ordre est celui de 10, C = 505. Nous le donnons avant et après ajustements (fig. 5 et 6).

55	66	75	86	95	6	15	26	35	46
45	36	25	16	5	96	85	76	65	56
54	67	74	87	94	7	14	27	34	47
48	33	28	13	8	93	88	73	68	53
57	64	77	84	97	4	17	24	37	44
43	38	23	18	3	98	83	78	63	58
52	69	72	89	92	9	12	29	32	49
50	31	30	11	10	91	90	71	70	51
59	62	79	82	99	2	19	22	39	42
41	40	21	20	1	100	81	80	61	60

Fig. 5.

[1] On démontre que, quand n est impair, ces sommes sont alternativement égales à C+n; après la permutation susvisée, elles deviennent égales à C+(n — 1). *(N. d. T.)*

55	66	75	86	95	6	15	26	35	46
43	38	23	18	3	98	83	78	63	58
54	67	74	87	94	7	14	27	34	47
48	33	28	13	8	93	88	73	68	53
57	64	77	84	97	4	17	24	37	44
45	36	25	16	5	96	85	76	65	56
52	69	72	89	92	9	12	29	32	49
51	30	31	10	11	90	91	70	71	50
59	62	79	82	99	2	19	22	39	42
41	40	21	20	1	100	81	80	61	60

Fig. 6.

Deuxième cas. $n = 4r + 2$. — Dans ce cas, aucun ajustement n'est nécessaire pour les colonnes. A l'aide d'une analyse qu'il serait trop long de reproduire ici, l'auteur a démontré qu'il est impossible de trouver, dans ce cas, deux rangées telles que leur permutation puisse ajuster les sommes dans les chevrons de la deuxième série. Il est possible, cependant, d'obtenir ce résultat par la permutation de deux paires de rangées, de la façon suivante:

THÉORÈME XV: *Dans le carré de Franklin d'ordre* $2n > 4$, *où* $n = 4r + 2$, *les diverses conditions de magie sont réalisées, excepté pour la seconde série de chevrons. Il peut être ajusté de façon à rendre ces derniers également magiques par la permutation de la* 2^{me} *rangée avec la* $(n + 4)^{me}$ *et en même temps la permutation de la* 5^{me} *rangée avec la* $(n + 3)^{me}$.

Le théorème ne s'applique manifestement pas au carré 4×4, puisqu'il n'y a pas de 5^{me} rangée à permuter. Dans le carré de Franklin d'ordre 4, on ne peut pas rendre magique la seconde série de chevrons par des permutations de rangées quelles qu'elles soient. Nous donnons le carré parfait d'ordre 12, $C = 870$, soit le plus petit qui puisse illustrer ce cas (fig. 7).

79	90	103	114	127	138	7	18	31	42	55	66
65	56	41	32	17	8	137	128	113	104	89	80
74	95	98	119	122	143	2	23	26	47	50	71
70	51	46	27	22	3	142	123	118	99	94	75
81	88	105	112	129	136	9	16	35	40	57	64
63	58	38	34	15	10	135	130	111	106	87	82
76	93	100	117	124	141	4	21	28	45	52	69
68	53	44	29	20	5	140	125	116	101	92	77
83	86	107	110	131	134	11	14	35	38	59	62
61	60	37	36	13	12	133	132	109	108	85	84
78	91	102	115	126	139	6	19	30	43	54	67
72	49	48	25	24	1	144	121	120	97	96	73

Fig. 7.

Troisième cas. $n = 4r + 3$. — Comme dans le premier cas, un ajustement doit être fait pour rendre les colonnes magiques. Comme dans le deuxième cas, il n'existe pas de permutation unique pouvant ajuster la seconde série de chevrons. Ainsi que l'indique le théorème suivant, exception faite pour les carrés d'ordres 6 et 14, il est possible de trouver deux permutations de rangées, qui rendent le carré parfait.

THÉORÈME XVI: *Le carré de Franklin d'ordre* $2n > 14$, *où* $n = 4r + 3$, *peut être rendu parfaitement magique par la permutation des éléments de la troisième rangée qui appartiennent à la même excursion, suivie des permutations de la* 2^{me} *rangée avec la* $(2n - 2)^{me}$ *et de la* 4^{me} *rangée avec la* $(n + 5)^{me}$.

Le théorème ne s'applique évidemment pas à l'ordre 6, puisque $n + 5 = 8$ dans ce cas, et qu'il n'y a pas de 8^{me} rangée. Pour l'ordre 14, la $(2n - 2)^{me}$ rangée est la même que la $(n + 5)^{me}$ et la permutation ne peut pas être faite. On ne peut pas trouver d'ajustement de rangées pouvant rendre magique, dans le carré de Franklin d'ordre 6, la seconde série de chevrons. Le carré d'ordre 14 peut être ajusté par une permutation entre la 4^{me} rangée et la 12^{me} suivie d'une autre entre la 5^{me} rangée

et la 11me. Le carré ajusté d'ordre 14 est donné par la figure 8, C = 1379:

105	120	133	148	161	176	189	8	21	36	49	64	77	92
91	78	63	50	35	22	7	190	175	162	147	134	119	106
100	125	128	153	156	181	184	13	16	41	44	69	72	97
87	82	59	54	31	26	3	194	171	166	143	138	115	110
107	118	135	146	163	174	191	6	23	34	51	62	79	90
89	80	61	52	33	24	5	192	173	164	145	136	117	108
102	123	130	151	158	179	186	11	18	39	46	67	74	95
96	73	68	45	40	17	12	185	180	157	152	129	124	101
109	116	137	144	165	172	193	4	25	32	53	60	81	88
94	75	66	47	38	19	10	187	178	159	150	131	122	103
104	121	132	149	160	177	188	9	20	37	48	65	76	93
99	70	71	42	43	14	15	182	183	154	155	126	127	98
111	114	139	142	167	170	195	2	27	30	55	58	83	86
85	84	57	56	29	28	1	196	169	168	141	140	113	112

Fig. 8.

Quatrième cas. $n = 4r + 4$. — Ce cas est le seul qui n'exige aucun ajustement. Le carré de Franklin, dont l'ordre est un multiple de 8, est parfait tel qu'il est.

La méthode de construction des carrés de Franklin peut être généralisée, en introduisant les nombres non pas dans l'ordre naturel, mais suivant certaines progressions arithmétiques. Toutefois, sauf pour quelques-unes de ces progressions, les ajustements pour les colonnes et pour la seconde série de chevrons peuvent devenir très compliqués. Dans ces carrés, les rangées et la première série de chevrons sont toujours magiques et on y trouve également la grille.