PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES INSCRITS DANS UN TRIANGLE DONNÉ

Autor(en): **Feldheim, Ervin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28601

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Le moment de cette résultante, par rapport à A, a pour valeur

$$(p + q) \cdot \mathrm{AN} = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}} + \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}}\right) \cdot \mathrm{AN} .$$

Nous venons de voir que ce produit est 2AM, c'est-à-dire la mesure de la diagonale du parallélogramme construit sur AB et AC.

Le vecteur-moment de p est dans le plan APQ et perpendiculaire à AP, dans un sens convenable; le vecteur-moment de q est dans le plan APQ et perpendiculaire à AQ, dans le sens voulu; enfin le vecteur-moment de la résultante est dans le plan APQ et perpendiculaire de même à AN. Et ces vecteurs-moments ont pour valeurs respectivement AB, AC et 2AM.

Par conséquent, nous aurons ces trois vecteurs-moments en faisant tourner le parallélogramme construit sur AB et AC, dans son plan, de $\pi/2$, dans le sens convenable.

Le moment de la résultante est donc bien la somme géométrique des moments des deux composantes.

PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES INSCRITS DANS UN TRIANGLE DONNÉ

PAR

Ervin FELDHEIM (Budapest).

I. — Considérons, pour commencer, un triangle arbitraire $A_0 B_0 C_0$ et prenons les points A_1, B_1, C_1 respectivement sur les côtés $B_0 C_0$, $C_0 A_0$, $A_0 B_0$. Construisons le triangle $A' B' C'$ circonscrit autour de $A_0 B_0 C_0$, et tel que les côtés respectifs soient parallèles à ceux de $A_1 B_1 C_1$. Introduisons pour les aires des triangles précédents les notations suivantes:

$$A_0 B_0 C_0 = t_0 , \quad A_1 B_1 C_1 = t_1 , \quad A' B' C' = t' .$$

Nous allons montrer qu'*entre les aires des trois triangles construits d'après ce qui précède, il y a la relation*

$$t_0^2 = t_1 t' \,. \tag{1}$$

En effet, joignons les trois couples de points $A_1 A'$, $B_1 B'$, $C_1 C'$. Les triangles $A_1 B_1 C_1$ et $A' B' C'$ sont semblables; si le rapport de similitude est k, et m_1 la distance des côtés $A_1 C_1$ et $A' C'$, on a

$$\text{aire du trapèze } A_1 A' C' C_1 = \frac{1}{2} m_1 (A_1 C_1 + A' C')$$

$$= (k + 1) \cdot \frac{1}{2} m_1 \cdot A_1 C_1 = (k + 1) \cdot \text{aire de } A_1 B_0 C_1 \,.$$

En faisant la somme des aires des trois trapèzes $A_1 A' C' C_1$, $C_1 C' B' B_1$ et $B_1 B' A' A_1$ ainsi exprimées, il vient

$$t' - t_1 = (k + 1)(t_0 - t_1) \,.$$

Mais $t' = k^2 t_1$, donc

$$(k^2 - 1) t_1 = (k + 1)(t_0 - t_1) \,,$$

et ainsi $t_0 = k t_1$. Il en résulte bien la relation $t_0^2 = t_1 t'$.

On peut se poser alors la question, comment construire le triangle $A_2 B_2 C_2$, *inscrit* dans $A_1 B_1 C_1$ de telle façon que ses côtés respectifs soient parallèles à ceux de $A_0 B_0 C_0$? Pour répondre à cette question, nous démontrons que:

Les droites $A_1 A'$, $B_1 B'$ *et* $C_1 C'$ *se coupent en un point commun* P *de leur plan. Les segments* A_0P, B_0P *et* C_0P *coupent les côtés* $B_1 C_1$, $C_1 A_1$ *et* $A_1 B_1$ *respectivement en* A_2, B_2 et C_2, *tels que* $A_2 B_2 C_2$ *sera le triangle cherché.*

Désignons par α_1', α_2'; β_1', β_2'; γ_1', γ_2' les angles marqués sur la figure 1. On a

$$\sin \alpha_1' = \frac{m_1}{A_1 A'} = \frac{2 \cdot A_1 B_0 C_1}{A_1 C_1 \cdot A_1 A'} \,, \quad \sin \alpha_2' = \frac{2 \cdot A_1 C_0 B_1}{A_1 B_1 \cdot A_1 A'} \,,$$

d'où

$$\frac{\sin \alpha_1'}{\sin \alpha_2'} = \frac{A_1 B_1}{A_1 C_1} \cdot \frac{A_1 B_0 C_1}{A_1 C_0 B_1} \,,$$

où par exemple $A_1 B_0 C_1$ signifie ici l'aire de ce triangle. De la même façon,

$$\frac{\sin \beta_1'}{\sin \beta_2'} = \frac{B_1 C_1}{A_1 B_1} \cdot \frac{A_1 C_0 B_1}{B_1 A_0 C_1} \quad \text{et} \quad \frac{\sin \gamma_1'}{\sin \gamma_2'} = \frac{C_1 A_1}{B_1 C_1} \cdot \frac{B_1 A_0 C_1}{A_1 B_0 C_1},$$

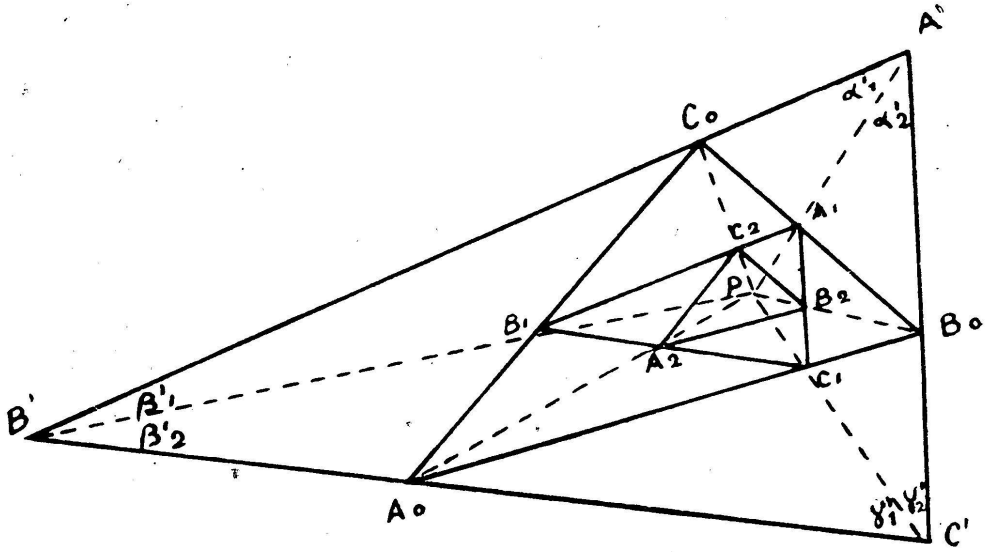

Fig. 1.

de sorte que

$$\frac{\sin \alpha_1' \cdot \sin \beta_1' \cdot \sin \gamma_1'}{\sin \alpha_2' \cdot \sin \beta_2' \cdot \sin \gamma_2'} = 1 .$$

Cette identité, n'étant qu'une autre forme de la relation bien connue de Ceva, prouve que $A' A_1$, $B' B_1$ et $C' C_1$ passent par un point commun P.

Alors, $B_1 C_1$ et $B' C'$ étant parallèles, nous aurons

$$\frac{PA_2}{PA_0} = \frac{PC_1}{PC'} = \frac{PB_2}{PB_0},$$

ce qui suffit pour voir que $A_2 B_2$ est bien parallèle à $A_0 B_0$.

Remarquons que les côtés de $A_2 B_2 C_2$ sont coupés par $P A_0$, $P B_0$, $P C_0$ en des points A_3, B_3, C_3 tels que le triangle $A_3 B_3 C_3$ inscrit dans $A_2 B_2 C_2$ a ses côtés parallèles à ceux de $A_1 B_1 C_1$, et ainsi de suite.

Il est très facile de calculer les côtés a_n, b_n, c_n du triangle $A_n B_n C_n$, en fonction des données relatives aux triangles $A_0 B_0 C_0$ et $A_1 B_1 C_1$ qui sont arbitraires. Or, on a

$$t_{n-1}^2 = t_n \cdot t_{n-2} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Mais, par exemple

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-2}}\right)^2 = \frac{t_n}{t_{n-2}}, \quad \text{donc} \quad \frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} = \frac{t_n}{t_{n-1}},$$

c'est-à-dire

$$a_n = \frac{t_n}{t_{n-1}} \cdot a_{n-2} \quad \text{ou} \quad a_n = \frac{t_1}{t_0} \cdot a_{n-2}.$$

Il en résulte finalement que

$$a_{2n} = \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^n \cdot a_0, \quad a_{2n+1} = \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^n \cdot a_1. \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Remarquons encore que

$$t_n = t_0 \cdot \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

et l'on peut aussi écrire, pour tout n,

$$a_n = a \cdot \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^n,$$

a désignant a_0 ou a_1 selon que n est pair ou impair.

II. — Nous allons généraliser le premier résultat de la façon suivante: Prenons deux triangles arbitraires A B C et A′ B′ C′ dans le plan et construisons les deux triangles D E F et D′ E′ F′ circonscrits respectivement à A B C et A′ B′ C′, et tels que les côtés de D E F soient parallèles aux côtés respectifs de A′ B′ C′, et ceux de D′ E′ F′ soient parallèles aux côtés respectifs de A B C. Si nous désignons par t, t', T et T′ les aires des triangles A B C, A′ B′ C′, D E F et D′ E′ F′, nous aurons cet énoncé:

Entre les aires des triangles A B C, A′ B′ C′, D E F et D′ E′ F′ *construits de la façon indiquée, il y a la relation*

$$\frac{t}{t'} = \frac{T}{T'}.$$

Désignons par α, β, γ, resp. α', β', γ' les angles des triangles A B C et A′ B′ C′, et par φ l'angle formé par A′ B′ et E′ F′. On

aura alors $\widehat{BCD} = \varphi$. Il est très facile à établir que

$$EF = \frac{AC \cdot \sin(\gamma + \varphi)}{\sin \beta'} + \frac{AB \cdot \sin(\alpha' - \beta + \varphi)}{\sin \gamma'}$$

$$E'F' = \frac{A'B' \cdot \sin(\gamma + \varphi)}{\sin \gamma} + \frac{A'C' \cdot \sin(\alpha' - \beta + \varphi)}{\sin \beta}.$$

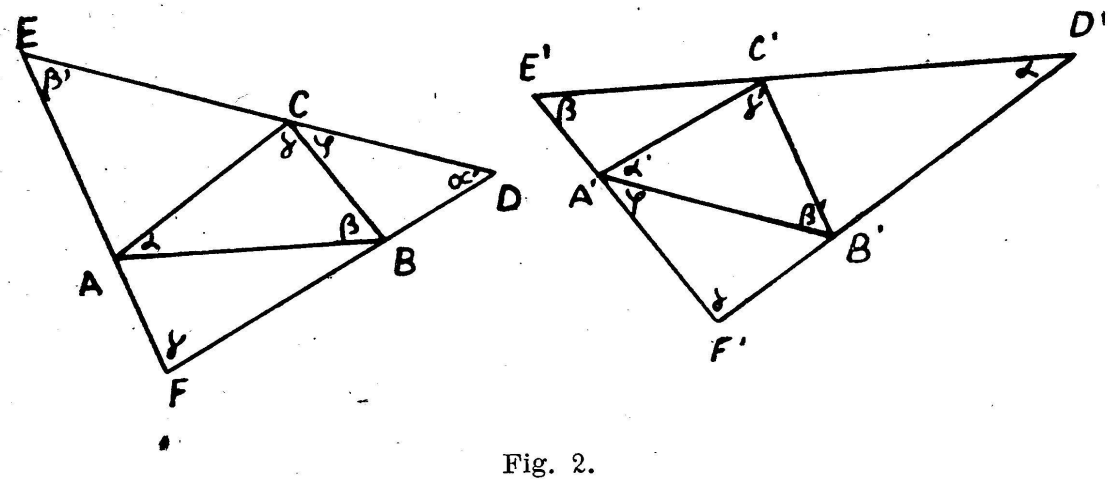

Fig. 2.

Si l'on fait observer que

$$A'B' \sin \beta' = A'C' \sin \gamma'$$

et

$$AB \cdot \sin \beta = AC \cdot \sin \gamma$$

on trouve que

$$\frac{EF}{E'F'} = \frac{AB \sin \beta}{A'C' \sin \gamma'} = \frac{t}{t'} \cdot \frac{B'C'}{BC},$$

c'est-à-dire

$$\frac{t}{t'} = \frac{BC \cdot EF}{B'C' \cdot E'F'}. \tag{4}$$

D'autre part, la similitude des triangles A B C, D' E' F' et A' B' C', D E F entraîne que

$$\frac{t}{T'} = \left(\frac{BC}{E'F'}\right)^2, \quad \frac{t'}{T} = \left(\frac{B'C'}{EF}\right)^2,$$

donc

$$\left(\frac{BC \cdot EF}{B'C' \cdot E'F'}\right)^2 = \frac{tT}{t'T'}, \tag{5}$$

ce qui donne bien, en tenant compte de (4), l'égalité à démontrer

$$tT' = t'T .$$

laquelle comprend le premier résultat.

III. — Nous dirons encore quelques mots sur la généralisation des problèmes précédents à des polygones. Rappelons, pour le cas du quadrilatère, la position du problème. Considérons le quadrilatère $A_0 B_0 C_0 D_0$, et inscrivons dans celui-ci un autre quadrilatère $A_1 B_1 C_1 D_1$, de telle façon que ses sommets soient respectivement sur les côtés $C_0 D_0$, $D_0 A_0$, $A_0 B_0$, $B_0 C_0$. Menons ensuite des parallèles $A' B'$, $B' C'$, $C' D'$, $D' A'$ aux côtés de $A_1 B_1 C_1 D_1$, passant par les sommets de $A_0 B_0 C_0 D_0$. On peut se proposer de chercher la relation qui existe entre les aires de ces trois quadrilatères. En répétant une démonstration précédente, on verra que si les quadrilatères $A_1 B_1 C_1 D_1$ et $A' B' C' D'$ sont semblables, la relation $t_0^2 = t_1 t'$ subsiste encore pour ce cas. On verra aussi que: $A' A_1$, $B' B_1$, $C' C_1$, $D' D_1$ passeront par un point commun P. C'est ainsi dans le cas des polygones réguliers.

Donnons ici explicitement le calcul des aires pour le cas où les trois quadrilatères sont des parallélogrammes. Posons

$$A_0B_0 = a_0 , \quad B_0C_0 = b_0 , \quad B_0\widehat{A_0}D_0 = \alpha_0$$

$$A_1B_1 = a_1 , \quad B_1C_1 = b_1 , \quad B_1\widehat{A_1}D_1 = \alpha_1$$

$$B_1\widehat{A_1}D_0 = \varphi$$

$$A'B' = a' , \quad B'C' = b' .$$

Il est très facile de montrer que

$$2a_0 b_0 \sin \alpha_0 = (a' b_1 + a_1 b') \sin \alpha_1 .$$

En élevant au carré, il vient

$$4t_1^2 = (a' b_1 - a_1 b')^2 \sin^2 \alpha_1 + 4t_1 t' .$$

On voit donc qu'on n'a le théorème exprimé par l'identité $t_0^2 = t_1 t'$ que dans le cas où $\frac{a'}{a_1} = \frac{b'}{b_1}$; *la similitude de* $A'B'C'D'$ *et* $A_1 B_1 C_1 D_1$ *est non seulement une condition suffisante mais aussi une condition nécessaire pour que le premier énoncé soit vérifié pour des parallélogrammes.*

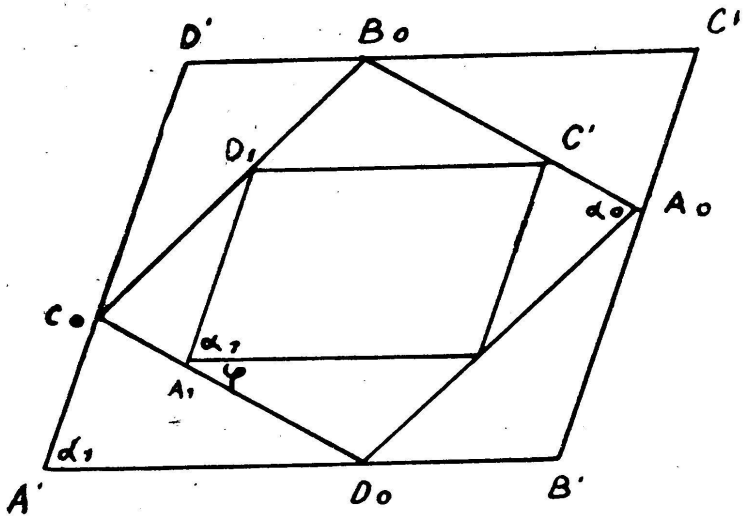

Fig. 3.

Nous allons démontrer maintenant que *la condition précédente pour la validité de cet énoncé n'est satisfaite dans le cas de parallélogrammes que si ces derniers sont des carrés.*

Calculons, en effet, les côtés du parallélogramme $A'B'C'D'$. Il vient

$$a' = a_1 + \frac{2b_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) \sin(\alpha_1 - \alpha_0 + \varphi)}{\sin \alpha_0 \sin \alpha_1},$$

$$b' = b_1 + \frac{2a_1 \sin \varphi \sin(\alpha_0 - \varphi)}{\sin \alpha_0 \sin \alpha_1}.$$

La relation $a' b_1 = a_1 b'$ entraîne alors, en identifiant aux deux membres, les facteurs de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, que l'on doit avoir

$$b_1^2 \sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_0) = 0, \quad b_1^2 \cos(2\alpha_1 - \alpha_0) = -a_1^2 \cos \alpha_0,$$

$$b_1^2 \sin(2\alpha_1 - \alpha_0) = a_1^2 \sin \alpha_1$$

d'où finalement

$$a_1 = b_1, \quad \alpha_0 = \alpha_1 = 90°, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$