Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES
Autor: Lebesgue, Henri
Kapitel: 10. — Autres méthodes. Cercles focaux des ovales de Descartes.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28584

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

d'où, puisque

$$\mathrm{MT} = \frac{\mathrm{M}d}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}(\mathrm{M},\ \gamma)}{k}} \cdot \frac{1}{\cos\varphi},$$

$$\frac{\mathrm{M}\omega \cdot \cos\widehat{\mathrm{TM}\omega}}{\sqrt{|\mathcal{P}(\mathrm{M},\ \gamma)|}} = \sqrt{|k|}\cos\varphi .$$

Si M est extérieur à γ, $k > 0$, $\dfrac{\sqrt{\mathcal{P}(\mathrm{M},\ \gamma)}}{\mathrm{M}\omega}$ est le cosinus du demi-angle sous lequel de M on voit γ; soit $\cos\alpha(\mathrm{M},\ \gamma)$.

Si M est intérieur à γ, $k < 0$, $\dfrac{\sqrt{-\mathcal{P}(\mathrm{M},\ \gamma)}}{\mathrm{M}\omega}$ est la tangente du demi-angle sous lequel de ω on voit la corde de γ dont M est le milieu; soit $\operatorname{tg}\beta(\mathrm{M},\ \gamma)$. On a donc:

$$\left\{\begin{array}{ll} k > 0\ , & \dfrac{\cos\widehat{\mathrm{TM}\omega}}{\cos\alpha(\mathrm{M},\ \gamma)} = \sqrt{k}\cos\varphi\ , \\[2ex] k < 0\ , & \dfrac{\cos\widehat{\mathrm{TM}\omega}}{\operatorname{tg}\beta(\mathrm{M},\ \gamma)} = \sqrt{-k}\cos\varphi\ . \end{array}\right. \tag{20}$$

Le fait que le premier membre des formules (20) *est, pour* M *fixe sur* $\mathcal{C}$, *le même pour tous les cercles focaux d'une même série est la généralisation à deux tels cercles de la propriété classique: la tangente bissecte les rayons vecteurs.*

10. — Autres méthodes. Cercles focaux des ovales de Descartes.

Ces exemples suffiront à montrer les exercices de généralisation que l'on peut envisager; bien que nos énoncés ne constituent pas les seules généralisations possibles, les cas où l'on obtiendrait des résultats élégants et assez simples pour être utiles à de jeunes élèves paraissent peu nombreux. Il faut noter d'ailleurs que l'exposé actuel se prête mal à la généralisation des propriétés les plus élémentaires des coniques lesquelles résultent, non de la définition que nous avons généralisée par la formule (7), mais de celle-ci: une conique est le lieu du centre M

d'un cercle $\mathfrak{M}$ qui passe par un point fixe et est tangent à un cercle fixe. Essayons de généraliser cette définition.

Nous attacherons tout naturellement à chaque point M un cercle $\mathfrak{M}$ de centre M et orthogonal à γ. Alors (7) montre que $\mathfrak{M}$ coupe la droite directrice d sous un angle constant, réel ou non, et (1) montre ensuite que $\mathfrak{M}$ coupe aussi sous un angle constant V chaque cercle du faisceau γ, d. En recherchant les cercles du faisceau pour lesquels $\cos V = \pm 1$, on aura deux cercles, réels ou imaginaires, enveloppes des cercles M et dont les centres sont les foyers, réels ou imaginaires, de la même série de cercles focaux que γ.

On aperçoit dans ces considérations une méthode connue pour l'étude des cercles focaux, basée elle aussi sur les propriétés des systèmes de cercles, et qui généraliserait l'un des procédés classiques pour passer des définitions de de La Hire à la définition des coniques par foyer et directrice. Elle consiste essentiellement en ceci: ayant un premier cercle focal γ (par exemple un foyer ou le cercle principal), de chaque point M défini par (7) comme centre, on trace la circonférence $\mathfrak{M}_0$ obtenue en augmentant (ou diminuant) d'une quantité constante le rayon de la circonférence concentrique $\mathfrak{M}$ orthogonale à γ. Alors les $\mathfrak{M}_0$ coupent toutes les circonférences d'un faisceau sous des angles V_0 constants; une d'entre elles donne $V_0 = \frac{\pi}{2}$, c'est un cercle focal, la droite directrice correspondante est l'axe radical du faisceau.

Il est clair que ce procédé, ou tout autre, présente autant d'intérêt que celui exposé. Je me contente de rappeler celui qui résulte du raisonnement de Dandelin pour les cercles ayant leurs centres sur l'axe focal et, pour l'autre série de cercles focaux d'une ellipse, celui qui consiste à regarder cette ellipse comme la projection d'une section plane d'une sphère.

Ce dernier procédé peut se généraliser à une conique quelconque et à n'importe laquelle des séries de cercles focaux; seulement, si l'on veut rester élémentaire, cela entraîne à des longueurs et à des artifices qui enlèvent tout intérêt à la méthode; mais son véritable avantage est qu'il s'applique aussi aux ovales de Descartes. C'est pour ce cas seulement que je vais l'indiquer et en faisant franchement appel à la théorie des quadriques.

Considérons deux quadriques de révolution Q_1, Q_2 à axes parallèles, disons verticaux. Toute quadrique Q passant par leur intersection est une quadrique de révolution à axe vertical; tous les axes sont dans un même plan. Il faut noter pourtant que la quadrique Q_0 dont l'axe est la droite de l'infini du plan des axes n'est pas vraiment de révolution: Q_0 est le cylindre parabolique projetant l'intersection sur le plan des axes.

Dans les quadriques Q il y a, en général, quatre cônes dont l'un se réduit au cylindre Q_0. J'écarte le cas où Q_1, Q_2 seraient homothétiques, cas qui conduirait à l'étude des coniques et non des ovales; il y a alors trois cônes en plus de Q_0. Soient S_1, S_2, S_3 leurs sommets; F_1, F_2, F_3 les projections de ces sommets sur le plan horizontal de projection; h_1, h_2, h_3 les cotes de ces sommets au dessus du plan horizontal; θ_1, θ_2, θ_3 les demi-angles aux sommets des cônes.

Si M est un point du plan horizontal, les cotes des points des trois cônes qui se projettent en M sont :

$$h_1 \pm MF_1 \operatorname{tg} \theta_1 , \qquad h_2 \pm MF_2 \operatorname{tg} \theta_2 , \qquad h_3 \pm MF_3 \operatorname{tg} \theta_3 .$$

D'où, pour définir la projection de l'intersection, l'une quelconque des trois relations:

$$h_1 \pm MF_1 \operatorname{tg} \theta_1 = h_2 \pm MF_2 \operatorname{tg} \theta_2 = h_3 \pm MF_3 \operatorname{tg} \theta_3 . \qquad (21)$$

Donc la projection envisagée est un ovale de Descartes de foyers, réels ou imaginaires, F_1, F_2, F_3. Bien entendu tout ovale peut inversement être considéré comme une telle projection, d'où l'existence du troisième foyer de l'ovale. Mais on peut aller plus loin: soient H_1 et H_2 les cotes des plans des centres de deux, Q_1 et Q_2, de nos quadriques, soient γ_1 et γ_2 leurs contours apparents en projection horizontale. Q_1, par exemple, sera définie par une relation de la forme

$$(z - H_1)^2 = K_1 \mathcal{P}(M, \gamma_1) ,$$

où M est la projection d'un point et z sa cote. La projection de l'intersection de Q_1 et Q_2 est donc définie par la relation:

$$H_1 \pm \sqrt{K_1 \mathcal{P}(M, \gamma_1)} = H_2 \pm \sqrt{K_2 \mathcal{P}(M, \gamma_2)} ; \qquad (22)$$

généralisation exacte des relations (21).

Les cercles γ_1, γ_2 jouent donc le rôle des foyers; ce sont les cercles focaux de l'ovale. Et, puisque la projection d'une courbe tracée sur une quadrique est tangente au contour apparent en projection aux points où elle le rencontre, ces cercles focaux sont ceux des cercles bitangents à l'ovale dont les centres sont sur l'axe de symétrie $F_1F_2F_3$ de la courbe.

L'étude des ovales est donc à recommander aux aspirants professeurs; en particulier, les définitions des coniques, à l'aide de deux foyers ou d'un foyer et d'une directrice, leur apparaîtront alors comme deux cas particuliers de la définition d'un ovale par la relation (22).

SUR LA THÉORIE DE L'ORDRE DES FIGURES RÉELLES ET LES TRAVAUX DE M. HAUPT

PAR

M. LINSMAN (Liége).

---

1. — Dans un très intéressant article « Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel » [**51**][1], M. MONTEL a donné un exposé d'ensemble des travaux de ce géomètre et des recherches qu'ils ont suscitées chez d'autres auteurs.

Sans vouloir fixer des limites bien nettes à la géométrie finie, nous pouvons dire qu'elle considère ordinairement ce que JUEL a appelé des figures élémentaires. Celles-ci sont toujours réelles, mais elles atteignent à un grand degré de généralité.

La notion capitale intervenant dans leur définition et dans leur étude est la notion d'ordre.

Considérons un ensemble ponctuel E plan (ou spatial), et supposons qu'il possède un nombre borné de points sur toute

[1] Les nombres en caractères gras renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.