Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES APPELS A L'INTUITION GÉOMÉTRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Autor: de Losada y Puga, Cristóbal

Kapitel: V. — Signification géométrique de la constante d'Euler.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28587

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(intégrale que nous supposons difficile) mais il sera aisé de trouver l'aire MNRS, parce que

$$\text{aire MNRS} = \int_{M}^{N} v\,du$$

(intégrale que nous supposons facile).

D'autre part, les aires des rectangles SNOQ et RMOP se déterminent facilement: elles sont égales respectivement à $u_0\, v_0$ et à $u_1\, v_1$.

Or, connaissant les aires SNOQ, RMOP et MNRS, nous pouvons en déduire l'aire MNPQ, car

$$\text{aire MNPQ} = \text{aire SNOQ} - \text{aire RMOP} - \text{aire MNRS}$$

c'est-à-dire

$$\int_{M}^{N} u\,dv = u_1 v_1 - u_0 v_0 - \int_{M}^{N} v\,du\ ,$$

qui est précisément la formule (1).

V. — Signification géométrique de la constante d'Euler.

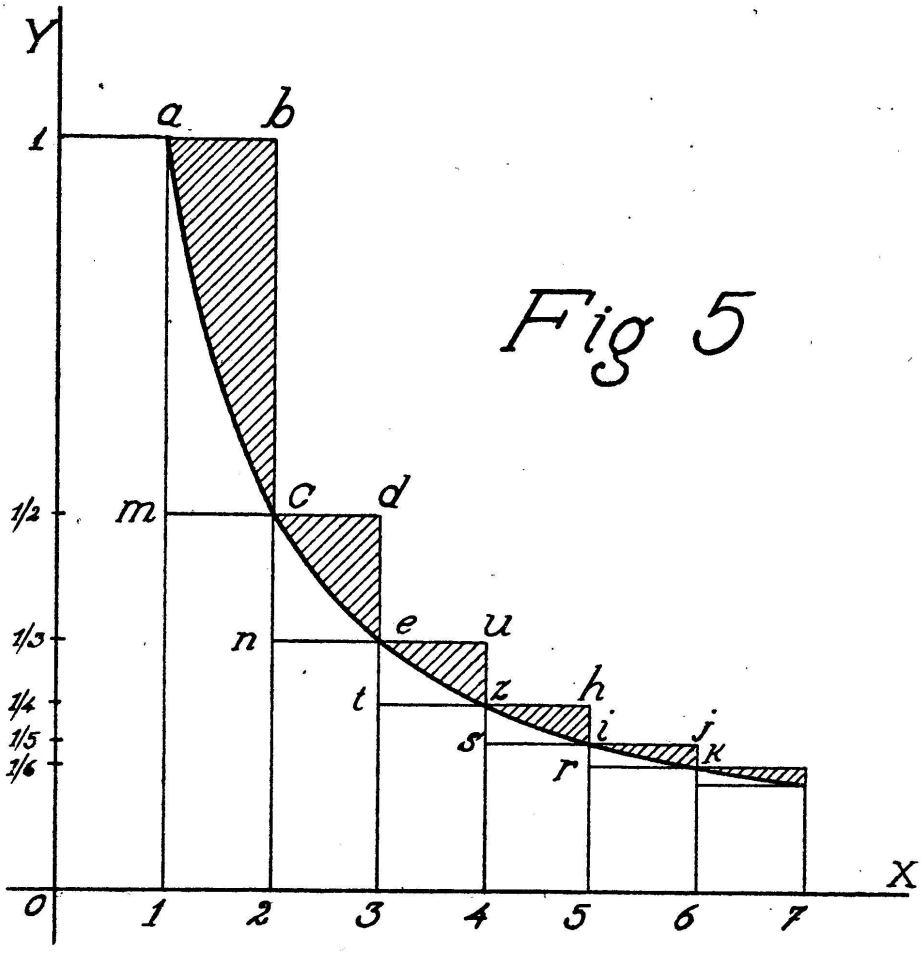
La constante d'Euler,

$$C = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log \text{nép}\, n\right]_{n \to \infty}$$

qui établit une relation simple entre $\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m}$ et log nép n quand $n \longrightarrow \infty$, a sa raison d'être dans cette circonstance que le terme général de la série est $1/m$ tandis que la dérivée de log nép x est $1/x$. Construisons, comme le montre la figure 5, une succession de rectangles de base égale à l'unité, et de hauteurs égales à $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ Ces rectangles seront compris entre les ordonnées successives tirées par les points d'abscisses égales à 1, 2, 3,

4,... L'ensemble de ces rectangles formera la figure *labcdeuzhijk*... et son aire aura pour valeur

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}=\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{m}$$



Pour plus de commodité, on a pris dans la figure l'échelle des abscisses beaucoup moindre que celle des ordonnées, de manière que l'unité d'aire soit la surface du rectangle $1ab2$. Construisons aussi l'hyperbole équilatère

$$y=\frac{1}{x}\,.$$

Cette hyperbole enferme, avec l'axe des abscisses et deux ordonnées extrêmes correspondantes aux abscisses 1 et n, une aire

$$\int_1^n \frac{dx}{x}=\log \text{nép}\, n\,.$$

Si nous considérons que tant les rectangles définis ci-dessus que l'hyperbole équilatère se prolongent indéfiniment vers les abscisses croissantes, nous verrons que l'aire de la partie hachurée de la figure est

$$\lim \left[\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m} - \log \text{nép}\, n \right]_{n \leftarrow \infty} = \mathrm{C} \,.$$

La constante d'Euler est égale, donc, à la somme des aires des triangles mixtilignes (employons encore cet adjectif démodé) *abc*, *cde*, *euz*, *zhi*, ...: telle est sa signification géométrique extrêmement simple.

Considérons maintenant l'ensemble des triangles non hachurés qui restent au-dessous de l'hyperbole: les triangles *amc*, *cne*, *etz*, *zsi*, ... et appelons C′ la somme de ses aires. Nous aurons

$$\mathrm{C}' = \lim \left[\int_1^n \frac{dx}{x} - \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m+1} \right]_{n \to \infty} .$$

La somme de ces grandeurs, qui est l'aire de l'ensemble des rectangles *abmc*, *cdne*, *eutz*, *zhsi*, ... sera

$$\mathrm{C} + \mathrm{C}' = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right] = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m(m+1)} \,.$$

Leur différence, soit la somme des aires des triangles hachurés moins les aires des triangles non hachurés, vaudra:

$$\mathrm{C} - \mathrm{C}' = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{1}{m} - \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} - \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} + \frac{1}{m+1} \right] =$$

$$= -1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[2 \cdot \frac{1}{m} - 2 \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \right] = -1 + 2\mathrm{C} \,.$$

En conséquence,

$$\mathrm{C}' = 1 - \mathrm{C} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C} + \mathrm{C}' = 1$$

et, en comparant avec l'équation (1), on voit que

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 1 \,.$$

On vérifie immédiatement sur la figure l'exactitude de la formule (2), parce que la somme des rectangles *abmc*, *cdne*, *eutz*, ... est équivalente au rectangle 1*ab*2.

Faisons encore une remarque. L'hyperbole équilatère divise chacun des rectangles *abmc*, *cdne*, *eutz*, ... en deux parties qui, en raison de la convexité de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, sont inégales. La partie qui reste au-dessous de la courbe (triangles non hachurés) est moindre que celle qui reste au-dessus (triangles hachurés). Et ainsi, la constante d'Euler est plus grande que $\frac{1}{2}$ (C = 0.57721...) tandis que la constante C′ est moindre que $\frac{1}{2}$ (C′ = 0.42278...).

Mais les rectangles seront divisés par leurs diagonales *ac*, *ce*, *ez*, ... en deux triangles égaux, dont les sommes vaudront $\frac{1}{2}$. En conséquence, entre l'hyperbole équilatère et ces diagonales, qui sont des cordes de la courbe, seront compris un ensemble de segments ou lunules, dont les aires auront pour somme $C - \frac{1}{2}$, soit 0.07721... En calculant analytiquement la somme des aires de ces segments ou lunules, on obtient identiquement $C - \frac{1}{2}$: leur considération ne présente, donc, aucune utilité pour le calcul de C.

VI. — Série double dont la somme est égale a la constante d'Euler.

A propos de la constante d'Euler, je vais mentionner une série double dont la somme est égale à la valeur de la constante; quoique ce sujet ne représente pas « un appel à l'intuition géométrique », je crois qu'il n'est pas trop déplacé ici.

Posons le développement de log nép n en série de Taylor à partir du développement de log nép $(n - 1)$

$$\log \text{nép}\, n = \log \text{nép}\,(n-1) + \\ + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + \frac{1}{3(n-1)^3} - \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{s(n-1)^s}.$$