Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA RECHERCHE D'UNE FRONTIÈRE
Autor: Loria, Gino
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28590

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

A LA RECHERCHE D'UNE FRONTIÈRE

PAR

Gino LORIA (Gênes).

---

1. — Les plus anciens documents, relatifs aux mathématiques, que nous possédons sont, tout le monde le sait, formés par des séries de problèmes, à données numériques, accompagnés de solutions, sans aucune justification théorique. La généralité des historiens qui les étudièrent, les expliquèrent et les commentèrent se sont complus à considérer ces questions comme appartenant à l'Algèbre. C'est ainsi qu'un volume classique de NESSELMANN a pour titre *Die Algebra der Griechen* et celui sur Diophante de notre éminent collègue Sir T. L. HEATH est défini par l'auteur comme *A Study in the History of Greek Algebra;* moi-même, pour exposer dans mon ouvrage sur *Le Scienze esatte nell'Antica Grecia* la substance de l'ouvrage de Diophante et pour faire connaître d'autres questions résolues par les arithméticiens grecs, je me suis servi de langage algébrique. Tout cela s'explique aisément car aujourd'hui tout le monde a un esprit foncièrement algébrique; c'est-à-dire, qu'en présence d'une question numérique, nous sommes tout naturellement portés à lui appliquer nos x, y,... et en conséquence à la traduire en équations; mais cela ne signifie certainement pas que nous tous (les exceptions confirment la règle) voulons attribuer aux anciens notre symbolisme et nos procédés algébriques; car nous savons que les questions qui se trouvent citées au début de cet article peuvent se résoudre (sans doute d'une manière moins commode) par des raisonnements directs, c'est-à-dire purement arithmétiques. Qu'on me permette de prouver cela par deux exemples, que je choisis, sans aucun but spécial, entre des centaines qui me sont offerts par l'ancienne littérature.

2. — Tout le monde connaît la jolie épigramme de l'*Anthologie grecque* se rapportant à l'âge qu'aurait atteint DIOPHANTE. D'après ses données il a été enfant pendant un sixième de sa vie, après un douzième il a mis barbe, après un septième il se maria; cinq ans après il eut un enfant qui mourut après avoir atteint seulement la moitié de l'âge à laquelle arriva son père; quatre ans après Diophante mourut. Or, avec nos idées modernes, pour connaître la durée de la vie du grand arithméticien grec, nous traduisons la question dont il s'agit par l'équation

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

qui donne sans peine $x = 84$. Cette considération est *suffisante* pour atteindre le but, mais elle n'est du tout *nécessaire*, comme je vais le prouver.

D'après les données du problème, l'âge de Diophante étant exactement divisible par les nombres 6, 12, 7, et 2 sera exprimé par un nombre multiple de 84, c'est-à-dire sera donné par le produit de 84 par un certain nombre; les périodes de sa vie que nous avons exprimé symboliquement par $x/6$, $x/12$, $x/7$ et $x/2$ seront donc les produits de ce nombre respectivement 14, 7, 12, 42, donc leur somme sera le produit de ce même nombre par la somme $14 + 7 + 12 + 42 = 75$. Or cette somme augmentée de $4 + 5 = 9$ doit être égale à l'âge de Diophante. Par conséquent, si on ôte de 84 fois le nombre cherché, 75 fois le même nombre, on doit obtenir 9; c'est-à-dire 9 est la différence entre 84 et 75 fois ce nombre, c'est-à-dire 9 fois ce nombre; mais alors ce nombre est nécessairement égal à 1; cela prouve que Diophante atteint précisément l'âge de 84 ans.

Par des raisonnements tout à fait analogues peuvent se résoudre toutes les questions que nous serions portés à traduire par des équations du premier degré.

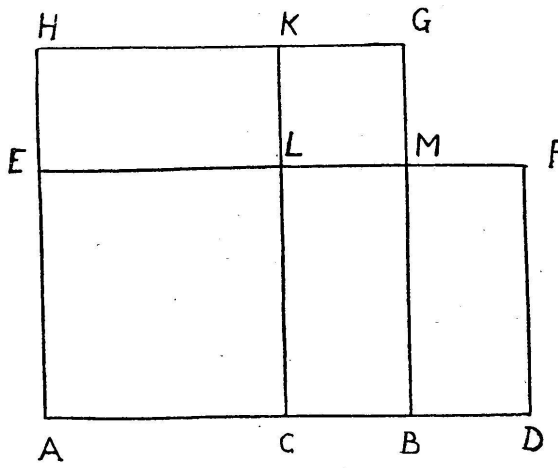
3. — Mais la même chose se répète par rapport aux problèmes du second degré. Considérons par exemple la question de trouver un rectangle dont on connaît le périmètre et l'aire; arithmétiquement il s'agit de déterminer deux nombres dont on connaît la somme et le produit; pour fixer les idées supposons que la

somme soit 10 et le produit 21. Je remarque avant tout que les deux nombres cherchés ne peuvent pas être tous les deux égaux à 5, car alors leur produit serait 25; par conséquent l'un d'eux sera égal à 5 augmenté d'une certaine quantité et l'autre à 5 diminué de la même quantité; alors leur produit sera égal à 25 diminué du carré de cette quantité [1]; mais ce produit est 21, donc le carré de la dite quantité sera égal à la différence entre 25 et 21, c'est-à-dire 4; cela prouve que cette quantité vaut 2 et que les nombres cherchés ont les valeurs 5 augmenté de 2, c'est-à-dire 7, et 5 diminué de 2, c'est-à-dire 3. Le problème est ainsi résolu sans algèbre; et la même chose arrive pour la généralité des questions offertes par la littérature ancienne.

4. — Arrivés à ce point se pose, ou mieux s'impose, une question qui étonnera bien des personnes, mais qui est assez troublante: nous avons vu que Nesselmann et Heath emploient couramment le mot « algèbre », mais quel en est la signification précise ? Pour obtenir une réponse, j'ai consulté les ouvrages sur ce sujet que j'avais sous la main, mais il ne m'a pas été possible d'obtenir une réponse claire et satisfaisante; je me suis alors aperçu que j'avais mis la main sur une question qui exigeait une recherche méthodique; je ne m'y suis pas refusé et je demande aux lecteurs la permission de donner un rapide aperçu des conclusions auxquelles je suis arrivé.

---

[1] On peut objecter que je viens d'appliquer le théorème « le produit de la somme par la différence de deux quantités est égal à la différence de leurs carrés ». Or pour me justifier je remarque que, quoique cette proposition ne se trouve pas explicitement dans les *Éléments* d'Euclide, on peut l'établir aisément par le tour de raisonnement géométrique dont il s'est servi dans son II^me^ Livre. En effet, représentons deux grandeurs quelconques (voyez la figure ci-jointe) par les segments AB et BC; portons BD = BC et complétons le rectangle ADFE en supposant DF = AC = AB — BC; il sera la représentation géométrique du produit considéré dans le théorème à démontrer. Complétons le carré ABGH sur AB et menons la droite CLK parallèle à la droite AEH. Alors le rectangle considéré peut être remplacé par un gnomon; et cette figure est précisément la différence entre les carrés construits sur les segments représentant les grandeurs considérées; c'est bien ce qu'il s'agissait de prouver.



J'ai commencé mes consultations par les encyclopédies jouissant de la meilleure réputation. Or la mère de tous les ouvrages de cette espèce, connue sous les noms de d'ALEMBERT et DIDEROT, ne m'a donné aucune lumière, car la définition d'algèbre comme « science du calcul des grandeurs considérées généralement », est incapable de nous guider lorsque nous voulons tracer une ligne de frontière entre l'arithmétique et l'algèbre; en effet les distinctions, qu'on attribue à Pythagore, des nombres (nombres carrés, cubes, premiers, parfaits, amis) devraient être considérées comme appartenant à l'algèbre, tandis qu'on les rencontre toujours dans les traités d'arithmétique. MONTFERRIER, auteur d'une *Encyclopédie* qui ne mérite pas l'oubli où elle est tombée, répète cette définition si imprécise. Plus exact est NATANI, dans un *Mathematisches Wörterbuch* que tout le monde connaît, car, après avoir dit que l'algèbre est la partie la plus élevée de l'arithmétique, précise en disant que son but est la résolution des équations: c'est au fond l'opinion de SERRET, qui dans son *Algèbre supérieure* débute par la déclaration suivante: « l'algèbre est l'analyse des équations », renvoyant ainsi à l'arithmétique un grand nombre de sujets qu'on trouve ordinairement dans les traités d'algèbre.

La France et l'Allemagne ne m'ayant pas fourni ce que je cherchais je me suis tourné vers l'Angleterre. *The Penny Ciclopaedia*, dont le tome I remonte à l'an 1833, se borne à apprendre à ses lecteurs l'étymologie du nom algèbre, en ajoutant que l'ouvrage de Diophante est le premier traité d'algèbre: il s'ensuit que, pour l'auteur de l'article dont il s'agit, l'algèbre serait la science qui apprend à résoudre les problèmes à données numériques, opinion qui ne donne aucune lumière pour résoudre la question dont je m'occupe. Pour l'obtenir j'ai alors eu recours aux éditions IX et XI de l'*Encyclopaedia Britannica*, mais sans résultats. La *Grande Encyclopédie* qui s'honore du nom de Marcelin BERTHELOT, a le mérite d'avouer qu'il est difficile de donner une bonne définition de l'algèbre et cite l'opinion de Joseph BERTRAND (auteur, il est bon de le rappeler, de traités d'arithmétique et d'algèbre, ayant joui d'une immense diffusion) que la ligne de démarcation entre l'algèbre et l'arithmétique est en quelque sorte insaisissable. Cela prouve qu'on est pro-

bablement en présence d'un cas où l'homme est autorisé à prendre la place de la nature, c'est-à-dire à fixer lui même une bonne définition qui rende impossible à l'avenir de regrettables malentendus.

Mes consultations infructueuses d'autres ouvrages encyclopédiques ayant éveillé en moi le doute que dans mes recherches je faisais fausse route, je me suis tourné vers des ouvrages spéciaux jouissant d'une bonne renommée. Comme c'est naturel, je me suis adressé avant tout au grand des grands, NEWTON, qui sous le nom d'*Arithmétique universelle* nous a laissé un excellent traité d'algèbre. Or les premiers mots de cet ouvrage nous montrent que le célèbre auteur des *Principia* considérait l'arithmétique et l'algèbre comme des sciences ayant le même but, celui de résoudre les problèmes, mais, tandis que l'une emploie des méthodes particulières, l'autre a ses bases dans des considérations tout à fait générales: c'est-à-dire l'une raisonne sur les nombres, l'autre sur des quantités tout à fait générales. LAGRANGE, dans son *Traité de la Résolution numérique des Equations*, en précisant les idées de son prédécesseur, dit que le caractère essentiel de l'algèbre consiste en ce que les résultats de ses opérations ne donnent pas seulement les valeurs individuelles des quantités qu'on cherche, mais elles représentent les opérations qu'il faut faire pour passer des quantités connues aux inconnues: remarquons en passant que ce n'est certainement pas ce que donnent les anciens ouvrages !

Ce qui précède montre que Newton et Lagrange, quoïqu'ils n'aient pas tranché la question qui nous occupe, nous ont mis sur la voie pour arriver à ce but. On pouvait espérer que ce but fût atteint par le plus grand méthodiste du XVIII^{e} siècle. Au contraire, et malheureusement, EULER ne fait aucune distinction entre arithmétique et algèbre, et la même chose peut se répéter pour DUHAMEL, qui, en exposant toutes les *Méthodes dans les Sciences de raisonnement*, aurait bien dû traiter la question dont je m'occupe. Peut-être a-t-il ressenti cet espèce de malaise que j'ai remarqué chez tous les auteurs de traités d'algèbre que j'ai consultés; on le trouve même (si je ne me trompe) chez l'auteur d'un ouvrage qui a exercé dans les dernières années du siècle passé une excellente influence: je parle des

Elemente der Mathematik de R. BALTZER, encore ouvrage précieux de consultation. Ma supposition se base sur la remarque qu'il a introduit, entre l'arithmétique élémentaire et l'algèbre, une branche intermédiaire, appellée arithmétique générale, qu'il est bien difficile de caractériser; en effet on pouvait croire que pour Baltzer l'algèbre n'était, comme pour Serret, que la théorie des équations; mais les premières sections du Volume III *(Algèbre)* de cet ouvrage, étant consacrées à des sujets ayant une liaison bien faible avec la théorie des équations, semblent porter à la conclusion que ce n'était pas le sentiment du regretté professeur de Giessen, sans toutefois permettre de découvrir quel était ce sentiment.

L'exemple de BALTZER a été suivi par M. J. TROPFKE qui a réparti la seconde section de sa *Geschichte der Elementar-Mathematik*, en trois volumes ayant pour sujets: « Rechnen-Allgemeine Arithmetik, Proportionen — Gleichungen ». Toutefois, l'algèbre n'est pas exclue du T. II qui débute par cette remarque: Aucune science ne peut se glorifier d'un auxiliaire aussi puissant que les mathématiques ont dans l'algèbre. D'ailleurs dans le T. III (p. 22) l'auteur dit: De l'histoire de l'arithmétique on tire la conséquence que l'algèbre a sa source dans la théorie des équations. Tout cela ne peut évidemment servir pour éclaircir la question que j'ai posée.

5. — Pour conclure je pense que, dans une branche du savoir humain qui est citée comme un modèle de précision, rien ne doit être douteux; si la frontière entre arithmétique et algèbre n'existe pas réellement, les hommes doivent avoir le courage de la tracer; c'est un cas où une solution même médicore doit être préférée à l'absence de solution; c'est pour cela que je propose de caractériser l'algèbre par l'*emploi méthodique de symboles* pour les quantités connues et inconnues, aussi bien que pour les opérations. Si on adopte cette proposition, l'algèbre devient une science tout à fait moderne que les anciens n'ont pas connue. Mais pour nos ancêtres c'est un titre de gloire indiscutable d'être arrivés à résoudre une infinité de questions numériques sans avoir recours à cet admirable instrument qui nous permet d'atteindre des hauteurs qui semblaient aux anciens surpasser toute possibilité humaine.