Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CUBIQUES D'EDOUARD LUCAS
Autor: Turrière, E.
Kapitel: première cubique de Lucas.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28591

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La cubique lieu de M_0 a pour équation

$$\frac{a_1\eta_0 - a_2\xi_0}{a_1\zeta_0 - a_3\xi_0} \cdot \frac{b_2\zeta_0 - b_3\eta_0}{b_2\xi_0 - b_1\eta_0} \cdot \frac{c_3\xi_0 - c_1\zeta_0}{c_3\eta_0 - c_2\zeta_0} = 1 .$$

Ces cubiques dépendent de six constantes arbitraires (cubique générale circonscrite).

L'absence du terme $\xi\eta\zeta$ se produit pour $a_3 b_1 c_2 = a_2 c_1 b_3$, c'est-à-dire lorsque les droites AA_0, BB_0, CC_0 concourent.

Il en est en particulier ainsi lorsque $A_0B_0C_0$ sont les points à l'infini des hauteurs du triangle. On est alors en présence du cas qui fit l'objet de la question posée par Edouard Lucas: on joint les sommets ABC du triangle à un point P de son plan; soient A′, B′, C′ les intersections de ces droites AP, BP, CP avec les côtés opposés. Le lieu de P est défini par la condition que les perpendiculaires aux côtés en A′B′C′ concourent en un point Q.

Le lieu de P est la *première cubique* de Lucas; le point Q associé décrit la *seconde cubique de Lucas*.

Ces cubiques ont donné lieu à quelques exercices relatifs à cette question et à la propriété de concours de normales de coniques circonscrites ou inscrites au triangle fondamental [1].

La première cubique de Lucas.

8. — L'équation de la première cubique en coordonnées barycentriques est

$$\Sigma a^2 \cdot \frac{\eta - \zeta}{\eta + \zeta} = 0 ;$$

a, b, c, sont les côtés du triangle.

---

[1] Edouard Lucas, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2me série, t. XV, 1876, p. 240; 550-555.

Nouvelle Correspondance mathématique, t. II, 1876, p. 94; IV, 1878, p. 261-272; t. V, 1879, p. 87; VI, 1880, p. 56.

Emile Lemoine, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Paris, 1889, p. 21.

G. Papelier, *Leçons sur les coordonnées tangentielles*, 1894, t. I, p. 284.

E. Mosnat, *Problèmes de géométrie analytique*, t. II, 1905, p. 470.

J. Kœhler, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*, 1886, t. I, p. 195-197.

Voir aussi la référence relative à une question de G. Darboux et à l'ouvrage de M. A. Haarbleicher indiquée à la suite (paragraphe 12).

En posant

$$\operatorname{cotg} A = \alpha\,, \quad \operatorname{cotg} B = \beta\,, \quad \operatorname{cotg} C = \gamma\,, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1\,;$$
$$a^2 = 2S(\beta + \gamma)\,, \quad b^2 = 2S(\gamma + \alpha)\,, \quad c^2 = 2S(\alpha + \beta)\,,$$

cette équation se met sous la forme:

$$\underline{\Sigma\alpha\xi(\eta^2 - \zeta^2) = 0\,.}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{1}{\xi} & \frac{1}{\eta} & \frac{1}{\zeta} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Elle est du type invariant dans la *transformation réciproque*, avec tangentes en A, B, C concourantes en un point $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ qui est le *réciproque* de l'orthocentre H.

La première cubique est le lieu des *points réciproques*, *associés de telle sorte que leur droite de jonction passe par le point fixe* Φ.

La première cubique passe par les points A, B, C, le centre de gravité G, l'orthocentre H, le pivot Φ, le symétrique H_1 de H par rapport au centre O du cercle circonscrit; par les sommets G′, G″, G‴ du triangle constitué par les parallèles aux côtés de ABC menées par A, B et C.

Les points G, G′, G″, G‴ sont les points doubles de la transformation réciproque ($\xi\xi_1 = \eta\eta_1 = \zeta\zeta_1$).

Le point H_1 est situé sur la droite d'Euler, qui est rencontrée par la première cubique en H, G, H_1.

Ce point H_1 est l'orthocentre du triangle G′G″G‴. Il est aussi l'orthocentre du triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit à A, B et C.

H_1 est aussi le centre radical des trois cercles de centres A, B, C et de rayons respectivement égaux aux côtés opposés *a*, *b* et *c*.

On peut prendre pour coordonnées normales de ce point H_1

$$\begin{cases} x = \cos B \cos C - \cos A\,, \\ y = \cos C \cos A - \cos B\,, \\ z = \cos A \cos B - \cos C\,; \end{cases}$$

et comme coordonnées barycentriques

$$\xi = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A ,$$
$$\eta = \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B ,$$
$$\zeta = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C ;$$

ses coordonnées barycentriques *absolues* ($\xi + \eta + \zeta = 1$) sont:

$$\xi = 1 - 2\beta\gamma , \quad \eta = 1 - 2\gamma\alpha , \quad \zeta = 1 - 2\alpha\beta ; \qquad (H_1)$$

les coordonnées absolues de H étant

$$\xi = \beta\gamma , \quad \eta = \gamma\alpha , \quad \zeta = \alpha\beta ,$$

et celles du centre O du cercle circonscrit

$$\xi = \frac{1}{2}\alpha(\beta + \gamma) , \quad \eta = \frac{1}{2}\beta(\gamma + \alpha) , \quad \zeta = \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta) ;$$

ces formules mettent bien en évidence ($\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$) que le milieu de HH_1 n'est autre que O.

Ajoutons que le point H_1 est situé sur l'hyperbole équilatère conjuguée passant par G, I, I′, I″, I‴ ayant pour centre le point de Steiner:

$$\Sigma(b^2 - c^2)\xi^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma(\beta - \gamma)\xi^2 = 0 ,$$
$$\sum \frac{y^2 - z^2}{a^2} = 0 ,$$

courbe connue de la géométrie du triangle.

La cubique et cette hyperbole équilatère sont tangentes au centre de gravité G; la tangente est la droite GK de jonction de G et du point K de Lemoine.

La tangente H_1 à la première cubique a pour équation

$$\Sigma\alpha(\beta - \gamma)^2\xi = 0 ,$$

et passe par le point de Steiner.

La tangente en H

$$\Sigma\alpha^3(\beta^2 - \gamma^2)\xi = 0$$

passe par le point

$$\xi = \frac{1}{\alpha^3} = \operatorname{tg}^3 A , \quad \text{etc.},$$

elle rencontre à nouveau la courbe en un point de coordonnées barycentriques

$$\xi = \operatorname{tg} A (\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C - \operatorname{tg}^2 A) \ , \quad \text{etc. ...}$$

Voici la distribution de quelques points remarquables de la première cubique, d'après les points de concours des tangentes et avec l'indication des arguments respectifs dans la représentation elliptique:

1er groupe. Points de contact des tangentes à la cubique issues de l'orthocentre $H(v)$.

A	B	C	Φ
ω_1	ω_2	ω_3	0 .

2me groupe. Points de contact des tangentes issues du point $\Phi(0)$.

G	G′	G″	G‴
$\frac{v}{2}$	$\frac{v}{2} + \omega_1$	$\frac{v}{2} + \omega_2$	$\frac{v}{2} + \omega_3$.

3me groupe. Points de contact des tangentes issues du point $(-v)$:

H	Φ'	Φ''	Φ'''
v	$v + \omega_1$	$v + \omega_2$	$v + \omega_3$.

$\Phi'\Phi''\Phi'''$ sont les projections de H_1 sur les côtés BC, CA, AB. Les hauteurs de $G'G''G'''$ sont précisément les droites $G'\Phi'$, $G''\Phi''$ et $G'''\Phi'''$.

La condition d'alignement de trois points sur la cubique est:

$$u_1 + u_2 + u_3 = v \ .$$

La seconde cubique de Lucas.

9. — En coordonnées normales, l'équation de la seconde cubique est:

$$\Sigma (\cos B \cos C - \cos A) x (y^2 - z^2) = 0 \ ;$$