première cubique de Lucas.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

La cubique lieu de M_0 a pour équation

$$\frac{a_1\eta_0 - a_2\xi_0}{a_1\zeta_0 - a_3\xi_0} \cdot \frac{b_2\zeta_0 - b_3\eta_0}{b_2\xi_0 - b_1\eta_0} \cdot \frac{c_3\xi_0 - c_1\zeta_0}{c_3\eta_0 - c_2\zeta_0} = 1 .$$

Ces cubiques dépendent de six constantes arbitraires (cubique générale circonscrite).

L'absence du terme $\xi\eta\zeta$ se produit pour $a_3 b_1 c_2 = a_2 c_1 b_3$, c'est-à-dire lorsque les droites AA_0, BB_0, CC_0 concourent.

Il en est en particulier ainsi lorsque $A_0B_0C_0$ sont les points à l'infini des hauteurs du triangle. On est alors en présence du cas qui fit l'objet de la question posée par Edouard Lucas: on joint les sommets ABC du triangle à un point P de son plan; soient A′, B′, C′ les intersections de ces droites AP, BP, CP avec les côtés opposés. Le lieu de P est défini par la condition que les perpendiculaires aux côtés en A′B′C′ concourent en un point Q.

Le lieu de P est la *première cubique* de Lucas; le point Q associé décrit la *seconde cubique de Lucas*.

Ces cubiques ont donné lieu à quelques exercices relatifs à cette question et à la propriété de concours de normales de coniques circonscrites ou inscrites au triangle fondamental [1].

La première cubique de Lucas.

8. — L'équation de la première cubique en coordonnées barycentriques est

$$\Sigma a^2 \cdot \frac{\eta - \zeta}{\eta + \zeta} = 0 ;$$

a, b, c, sont les côtés du triangle.

---

[1] Edouard Lucas, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2me série, t. XV, 1876, p. 240; 550-555.

Nouvelle Correspondance mathématique, t. II, 1876, p. 94; IV, 1878, p. 261-272; t. V, 1879, p. 87; VI, 1880, p. 56.

Emile Lemoine, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Paris, 1889, p. 21.

G. Papelier, *Leçons sur les coordonnées tangentielles*, 1894, t. I, p. 284.

E. Mosnat, *Problèmes de géométrie analytique*, t. II, 1905, p. 470.

J. Kœhler, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*, 1886, t. I, p. 195-197.

Voir aussi la référence relative à une question de G. Darboux et à l'ouvrage de M. A. Haarbleicher indiquée à la suite (paragraphe 12).

En posant

$$\operatorname{cotg} A = \alpha\,, \quad \operatorname{cotg} B = \beta\,, \quad \operatorname{cotg} C = \gamma\,, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1\,;$$
$$a^2 = 2S(\beta + \gamma)\,, \quad b^2 = 2S(\gamma + \alpha)\,, \quad c^2 = 2S(\alpha + \beta)\,,$$

cette équation se met sous la forme:

$$\underline{\Sigma\alpha\xi(\eta^2 - \zeta^2) = 0\,.}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{1}{\xi} & \frac{1}{\eta} & \frac{1}{\zeta} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Elle est du type invariant dans la *transformation réciproque*, avec tangentes en A, B, C concourantes en un point $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ qui est le *réciproque* de l'orthocentre H.

La première cubique est le lieu des *points réciproques*, *associés de telle sorte que leur droite de jonction passe par le point fixe* Φ.

La première cubique passe par les points A, B, C, le centre de gravité G, l'orthocentre H, le pivot Φ, le symétrique H_1 de H par rapport au centre O du cercle circonscrit; par les sommets G′, G″, G‴ du triangle constitué par les parallèles aux côtés de ABC menées par A, B et C.

Les points G, G′, G″, G‴ sont les points doubles de la transformation réciproque ($\xi\xi_1 = \eta\eta_1 = \zeta\zeta_1$).

Le point H_1 est situé sur la droite d'Euler, qui est rencontrée par la première cubique en H, G, H_1.

Ce point H_1 est l'orthocentre du triangle G′G″G‴. Il est aussi l'orthocentre du triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit à A, B et C.

H_1 est aussi le centre radical des trois cercles de centres A, B, C et de rayons respectivement égaux aux côtés opposés *a*, *b* et *c*.

On peut prendre pour coordonnées normales de ce point H_1

$$\begin{cases} x = \cos B \cos C - \cos A\,, \\ y = \cos C \cos A - \cos B\,, \\ z = \cos A \cos B - \cos C\,; \end{cases}$$

et comme coordonnées barycentriques

$$\xi = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A ,$$
$$\eta = \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B ,$$
$$\zeta = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C ;$$

ses coordonnées barycentriques *absolues* ($\xi + \eta + \zeta = 1$) sont:

$$\xi = 1 - 2\beta\gamma , \quad \eta = 1 - 2\gamma\alpha , \quad \zeta = 1 - 2\alpha\beta ; \qquad (H_1)$$

les coordonnées absolues de H étant

$$\xi = \beta\gamma , \quad \eta = \gamma\alpha , \quad \zeta = \alpha\beta ,$$

et celles du centre O du cercle circonscrit

$$\xi = \frac{1}{2}\alpha(\beta + \gamma) , \quad \eta = \frac{1}{2}\beta(\gamma + \alpha) , \quad \zeta = \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta) ;$$

ces formules mettent bien en évidence ($\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$) que le milieu de HH_1 n'est autre que O.

Ajoutons que le point H_1 est situé sur l'hyperbole équilatère conjuguée passant par G, I, I′, I″, I‴ ayant pour centre le point de Steiner:

$$\Sigma(b^2 - c^2)\xi^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma(\beta - \gamma)\xi^2 = 0 ,$$
$$\sum \frac{y^2 - z^2}{a^2} = 0 ,$$

courbe connue de la géométrie du triangle.

La cubique et cette hyperbole équilatère sont tangentes au centre de gravité G; la tangente est la droite GK de jonction de G et du point K de Lemoine.

La tangente H_1 à la première cubique a pour équation

$$\Sigma\alpha(\beta - \gamma)^2\xi = 0 ,$$

et passe par le point de Steiner.

La tangente en H

$$\Sigma\alpha^3(\beta^2 - \gamma^2)\xi = 0$$

passe par le point

$$\xi = \frac{1}{\alpha^3} = \operatorname{tg}^3 A , \quad \text{etc.},$$

elle rencontre à nouveau la courbe en un point de coordonnées barycentriques

$$\xi = \operatorname{tg} A (\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C - \operatorname{tg}^2 A) \ , \quad \text{etc. ...}$$

Voici la distribution de quelques points remarquables de la première cubique, d'après les points de concours des tangentes et avec l'indication des arguments respectifs dans la représentation elliptique:

1er groupe. Points de contact des tangentes à la cubique issues de l'orthocentre $H(v)$.

A	B	C	Φ
ω_1	ω_2	ω_3	0 .

2me groupe. Points de contact des tangentes issues du point $\Phi(0)$.

G	G′	G″	G‴
$\frac{v}{2}$	$\frac{v}{2} + \omega_1$	$\frac{v}{2} + \omega_2$	$\frac{v}{2} + \omega_3$.

3me groupe. Points de contact des tangentes issues du point $(-v)$:

H	Φ'	Φ''	Φ'''
v	$v + \omega_1$	$v + \omega_2$	$v + \omega_3$.

$\Phi'\Phi''\Phi'''$ sont les projections de H_1 sur les côtés BC, CA, AB. Les hauteurs de $G'G''G'''$ sont précisément les droites $G'\Phi'$, $G''\Phi''$ et $G'''\Phi'''$.

La condition d'alignement de trois points sur la cubique est:

$$u_1 + u_2 + u_3 = v \ .$$

La seconde cubique de Lucas.

9. — En coordonnées normales, l'équation de la seconde cubique est:

$$\Sigma (\cos B \cos C - \cos A) x (y^2 - z^2) = 0 \ ;$$