

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EMPLOI DU VECTORIEL DANS LA THÉORIE DU TRIÈDRE MOBILE DE DARBOUX
Autor: Becqué, J.
Kapitel: I. — Mouvement à trois paramètres.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515777>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

dans l'espace euclidien, tout en donnant des résultats à la fois condensés et aisément développables.

Je prendrai comme exemple quelques questions traitées par DARBOUX dans sa *Théorie des Surfaces*. Au symbole de Kronecker, désigné ici par (ab) , j'ajouterai le symbole (abc) valeur $+1$, -1 , ou 0 suivant que la permutation des trois nombres est paire, impaire, ou avec deux nombres égaux.

I. — MOUVEMENT À TROIS PARAMÈTRES.

Considérons deux trièdres orthonormaux, l'un $I (I_m)$ fixe, d'origine O , l'autre $i (i_m)$ lié au corps, d'origine M ; ces deux trièdres sont rattachés l'un à l'autre par les cosinus directeurs des angles des axes :

$$c_l^m = I^m \times i_l ,$$

a. — Soit un vecteur a de composantes a^m sur le trièdre i , posons $a/R = i_m \frac{\partial a^m}{\partial u^R}$, désignons par p_R la rotation instantanée de i quand u^R varie seul, la condition $i_m \times i_m = 1$, nous donne quand u^R varie seul $i_m \times \frac{\partial i_m}{\partial u^R} = 0$, c'est donc que p_R est tel que $\frac{\partial i_m}{\partial u^R} = p_R \wedge i_m$, p_R a pour composantes $p_R^m = p_R \times i^m$, ces notations permettent de séparer le mouvement en un mouvement relatif et en un mouvement d'entraînement

$$\frac{\partial a}{\partial u^R} = \frac{\partial}{\partial u^R} a^m i_m = i_m \frac{\partial a^m}{\partial u^R} + a^m \frac{\partial i_m}{\partial u^R} = a/R + p_R \wedge a . \quad (1)$$

Passons au repère (I_m) mais, pour abrégier l'écriture, écrivons I pour I_m jusqu'à l'équation (A_1) , I étant fixe, les $\frac{\partial I}{\partial u^R}$ sont nuls, donc :

$$I/R = I \wedge p_R , \quad (2)$$

leurs dérivées partielles sont $\frac{\partial}{\partial u^S} I/R = \frac{\partial I}{\partial u^S} \wedge p_R + I \wedge \frac{\partial p_R}{\partial u^S}$, pour évaluer les $\frac{\partial}{\partial u^S}$ tenons compte de (1) qui s'applique aux

vecteurs I et p_R , le premier membre est, d'après (2): $(I_{/R})_{/S} + p_S \wedge I_{/R} = I_{/R/S} + p_S \wedge (I \wedge p_R)$, le second membre est $I \wedge (p_{R/S} + p_S \wedge p_R)$, on a donc $I_{/R/S} + p_S \wedge (I \wedge p_R) = I \wedge p_{R/S} + I \wedge (p_S \wedge p_R)$, de même $I_{/S/R} + p_R \wedge (I \wedge p_S) = I \wedge p_{S/R} + I \wedge (p_R \wedge p_S)$, or: 1° $I_{/R/S} = I_{/S/R}$, car les $/R/S$ supposent des vitesses relatives, donc des i_m constants; 2° entre les trois vecteurs I , p_R , p_S on a l'identité $I \wedge (p_R \wedge p_S) + p_R \wedge (p_S \wedge I) + p_S \wedge (I \wedge p_R) = 0$, donc $p_S \wedge (I \wedge p_R) - p_R \wedge (I \wedge p_S) = -I \wedge (p_R \wedge p_S)$, et par soustraction des deux formules on obtient: $-I \wedge (p_R \wedge p_S) = I \wedge (p_{R/S} - p_{S/R}) + I \wedge (p_S \wedge p_R) - I \wedge (p_R \wedge p_S)$, et par suite: $I \wedge (p_{R/S} - p_{S/R} + p_S \wedge p_R) = 0$, d'où les équations pour trois paramètres généralisant les équations de Darboux (L. I, ch. V, éq. 5) pour deux paramètres (cf. *Systèmes orthogonaux*, L. II, ch. II):

$$(A_1) p_{R/S} - p_{S/R} = p_R \wedge p_S ;$$

b. — Pour déterminer le mouvement d'un point, introduisons les deux trios de vecteurs: vitesses M_R de l'origine M et rotations p_R du trièdre mobile pour u^R variant seul ($R = 1, 2, 3$).

Appliquons (1) aux vitesses $\frac{\partial M_R}{\partial u^S} = M_{R/S} + p_S \wedge M_R$, mais

puisque $M_R = \frac{\partial M}{\partial u^R}$, on a $\partial^2 M / \partial u^R \partial u^S = \partial M_R / \partial u^S = \partial M_S / \partial u^R$,

donc:

$$(A_2) M_{R/S} - M_{S/R} = p_R \wedge M_S - p_S \wedge M_R ;$$

c. — Introduisons p_R^m et M_R^m composantes sur i_m de p_R et M_R , ayant:

$$M_{R/S} = (M_R^0 i_0)_{/S} = i_0 \partial M_R^0 / \partial u^S, \quad p_{R/S} = (p_R^0 i_0)_{/S} = i_0 \partial p_R^0 / \partial u^S,$$

$$p_R \wedge p_S = p_R^m i_m \wedge p_S^n i_n = p_R^m p_S^n i_0 (mno),$$

$$p_R \wedge M_S = p_R^m i_m \wedge M_S^n i_n = p_R^m M_S^n i_0 (mno) ;$$

les (A) donnent en égalant les coefficients de i_0 :

$$(A_1) \frac{\partial p_R^0}{\partial u^S} - \frac{\partial p_S^0}{\partial u^R} = p_R^m p_S^n (mno),$$

$$(A_2) \frac{\partial M_R^0}{\partial u^S} - \frac{\partial M_S^0}{\partial u^R} = (p_R^m M_S^n - p_S^m M_R^n) (mno) ;$$

d. — Un déplacement d appliqué aux paramètres produit un déplacement dM de l'origine et di_a des axes, ayant pour expression (posant $M^m = M_r^m du^r = i_m \times dM$, $p = p_r du^r$):

$$dM = M_r du^r = (M_r \times i_m) i_m du^r = M_r^m i_m du^r = M^m i_m ,$$

$$di_a = \frac{\partial i_a}{\partial u^r} du^r = p_r \wedge i_a du^r = p_r du^r \wedge i_a = p \wedge i_a ;$$

en désignant par p^m les composantes de p sur (i_m) : $p^m = p \times i_m = p_r du^r \times i_m = p_r^m du^r$, on peut écrire:

$$di_a = p^c i_c \wedge i_a = (abc) i_b p^c ,$$

si l'on pose $di_a = \omega_{an} i_n$ (par exemple pp. 177 et suivantes de: *Théorie des groupes finis et continus...* de M. E. CARTAN), le lien avec la notation ci-dessus s'obtient en observant que:

$$\omega_{an} = di_a \times i_n = p \wedge i_a \times i_n = p \times i_a \wedge i_n = p \times (anr) i_r = p^r (anr) ,$$

on en déduit que $\omega_{AA} = 0$, $\omega_{an} = -\omega_{na}$, car $(anr) = -(nar)$, et que

$$p^a = \frac{1}{2} (amn) \omega_{mn} ;$$

e. — Introduisons maintenant un trièdre auxiliaire qui va servir à la représentation sphérique, son origine sera fixe. Pour un point N lié au trièdre, tel que $N = M + n$, on aura $\frac{\partial N}{\partial u^R} = \frac{\partial M}{\partial u^R} + n_{/R} + p_R \wedge n$, qui se réduit à $\frac{\partial N}{\partial u^R} = p_R \wedge n$, et posons toujours $dN = du^r \frac{\partial N}{\partial u^r}$, on a:

$$dN = p \wedge n ,$$

par suite $dN^2 = (p \wedge n)^2 = p^2 n^2 - (p \times n)^2$, et si n est la normale unitaire à la surface ($n = i_3$), $n^2 = 1$, $p \times n = p^3 = p_r^3 du^r$, $(p \times n)^2 = p_r^3 p_s^3 du^r du^s$, $p^2 = p^m p^m = p_r^m p_s^m du^r du^s$, donc en désignant par une lettre grecque un indice qui ne prend pas la valeur 3,

$$d\sigma^2 = dN^2 = (p \wedge n)^2 = p_r^\varepsilon p_s^\varepsilon du^r du^s ,$$

f. — Pour un point N lié au trièdre mobile (i_m) on aura, puisque $p \wedge n = p^b i_b \wedge n^c i_c = i^a (abc) p^b n^c$,

$$dN = dM + p \wedge n = i_a (M^a + (abc) p^b n^c) , \quad (f)$$

g. — Si N était mobile par rapport à (i_m) on aurait (DARBOUX, L. I, ch. VII, éq. 4):

$$dN = i_a (dn^a + M^a + (abc) p^b n^c) .$$

II. — APPLICATIONS À QUELQUES QUESTIONS GÉNÉRALES.

a. — *Tangentes conjuguées.* — « Si le point M de la surface décrit une courbe on obtiendra la conjuguée de la tangente à cette courbe en prenant l'intersection du plan tangent en M avec le plan tangent infiniment voisin » (DARBOUX, L. V, ch. I), cette droite est l'axe des normales N — M en M, et N + dN — (M + dM) au point infiniment voisin de M, elle a donc pour vecteur, d'après (f):

$$\begin{aligned} j &= (N - M) \wedge (N - M + dN - dM) = \\ &= n \wedge (n + p \wedge n) = p (n \times n) - n (p \times n) = p - np^3 = p^\varepsilon i_\varepsilon , \end{aligned}$$

et un déplacement δM suivant la direction conjuguée de dM devra satisfaire à l'équation (puisque δM devra être suivant j):

$$\begin{aligned} \delta &= j \wedge \delta M = (n \wedge dN) \wedge \delta M = p^\mu i_\mu \wedge M_r^\nu \delta u^r i_\nu = \\ &= p^\mu M_r^\nu (\mu\nu 3) i_3 \delta u^r = (3 \mu\nu) n p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha \delta u^\beta , \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$(3 \mu\nu) p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha \delta u^\beta = 0 .$$

Si les deux directions conjuguées coïncident, on obtient l'équation des asymptotiques:

$$j \wedge dM = 0 \quad \text{ou} \quad (3 \mu\nu) p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha du^\beta = 0 ,$$

ou encore, ayant $j = n \wedge (p \wedge n)$ et $dN = p \wedge n$, on a $dN \times j = 0$ et, ici, j portant dM :

$$dM \times dN = 0 .$$