I. — Mouvement à trois paramètres.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

dans l'espace euclidien, tout en donnant des résultats à la fois condensés et aisément développables.

Je prendrai comme exemple quelques questions traitées par DARBOUX dans sa *Théorie des Surfaces*. Au symbole de Kronecker, désigné ici par (ab), j'ajouterai le symbole (abc) valeur $+1$, -1, ou 0 suivant que la permutation des trois nombres est paire, impaire, ou avec deux nombres égaux.

I. — MOUVEMENT À TROIS PARAMÈTRES.

Considérons deux trièdres orthonormaux, l'un $\mathrm{I}\,(\mathrm{I}_m)$ fixe, d'origine O, l'autre $i\,(i_m)$ lié au corps, d'origine M; ces deux trièdres sont rattachés l'un à l'autre par les cosinus directeurs des angles des axes:

$$c_l^m = \mathrm{I}^m \times i_l \,,$$

a. — Soit un vecteur a de composantes a^m sur le trièdre i, posons ${}^a/_{\mathrm{R}} = i_m \dfrac{\partial a^m}{\partial u^{\mathrm{R}}}$, désignons par p_{R} la rotation instantanée de i quand u^{R} varie seul, la condition $i_m \times i_m = 1$, nous donne quand u^{R} varie seul $i_m \times \dfrac{\partial i_m}{\partial u^{\mathrm{R}}} = 0$, c'est donc que p_{R} est tel que $\dfrac{\partial i_m}{\partial u^{\mathrm{R}}} = p_{\mathrm{R}} \wedge i_m$, p_{R} a pour composantes $p_{\mathrm{R}}^m = p_{\mathrm{R}} \times i^m$, ces notations permettent de séparer le mouvement en un mouvement relatif et en un mouvement d'entraînement

$$\frac{\partial a}{\partial u^{\mathrm{R}}} = \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{R}}} a^m i_m = i_m \frac{\partial a^m}{\partial u^{\mathrm{R}}} + a^m \frac{\partial i_m}{\partial u^{\mathrm{R}}} = a_{/\mathrm{R}} + p_{\mathrm{R}} \wedge a \,. \qquad (1)$$

Passons au repère (I_m) mais, pour abréger l'écriture, écrivons I pour I_m jusqu'à l'équation (A_1), I étant fixe, les $\dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial u^{\mathrm{R}}}$ sont nuls, donc:

$$\mathrm{I}_{/\mathrm{R}} = \mathrm{I} \wedge p_{\mathrm{R}} \,, \qquad (2)$$

leurs dérivées partielles sont $\dfrac{\partial}{\partial u^{\mathrm{S}}} \mathrm{I}_{/\mathrm{R}} = \dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial u^{\mathrm{S}}} \wedge p_{\mathrm{R}} + \mathrm{I} \wedge \dfrac{\partial p_{\mathrm{R}}}{\partial u^{\mathrm{S}}}$, pour évaluer les $\dfrac{\partial}{\partial u^{\mathrm{S}}}$ tenons compte de (1) qui s'applique aux

vecteurs I et p_R, le premier membre est, d'après (2): $(I_{/R})_{/S} + p_S \wedge I_{/R} = I_{/R/S} + p_S \wedge (I \wedge p_R)$, le second membre est $I \wedge (p_{R/S} + p_S \wedge p_R)$, on a donc $I_{/R/S} + p_S \wedge (I \wedge p_R) = I \wedge p_{R/S} + I \wedge (p_S \wedge p_R)$, de même $I_{/S/R} + p_R \wedge (I \wedge p_S) = I \wedge p_{S/R} + I \wedge (p_R \wedge p_S)$, or: 1° $I_{/R/S} = I_{/S/R}$, car les /R/S supposent des vitesses relatives, donc des i_m constants; 2° entre les trois vecteurs I, p_R, p_S on a l'identité $I \wedge (p_R \wedge p_S) + p_R \wedge (p_S \wedge I) + p_S \wedge (I \wedge p_R) = 0$, donc $p_S \wedge (I \wedge p_R) - p_R \wedge (I \wedge p_S) = - I \wedge (p_R \wedge p_S)$, et par soustraction des deux formules on obtient: $- I \wedge (p_R \wedge p_S) = I \wedge (p_{R/S} - p_{S/R}) + I \wedge (p_S \wedge p_R) - I \wedge (p_R \wedge p_S)$, et par suite: $I \wedge (p_{R/S} - p_{S/R} + p_S \wedge p_R) = 0$, d'où les équations pour trois paramètres généralisant les équations de Darboux (L. I, ch. V, éq. 5) pour deux paramètres (cf. *Systèmes orthogonaux*, L. II, ch. II):

$$(A_1)\, p_{R/S} - p_{S/R} = p_R \wedge p_S \;;$$

b. — Pour déterminer le mouvement d'un point, introduisons les deux trios de vecteurs: vitesses M_R de l'origine M et rotations p_R du trièdre mobile pour u^R variant seul (R = 1, 2, 3). Appliquons (1) aux vitesses $\frac{\partial M_R}{\partial u^S} = M_{R/S} + p_S \wedge M_R$, mais puisque $M_R = \frac{\partial M}{\partial u^R}$, on a $\partial^2 M / \partial u^R \partial u^S = \partial M_R / \partial u^S = \partial M_S / \partial u^R$, donc:

$$(A_2)\, M_{R/S} - M_{S/R} = p_R \wedge M_S - p_S \wedge M_R \;;$$

c. — Introduisons p_R^m et M_R^m composantes sur i_m de p_R et M_R, ayant:

$$M_{R/S} = (M_R^0 i_0)_{/S} = i_0\, \partial M_R^0 / \partial u^S \;, \qquad p_{R/S} = (p_R^0 i_0)_{/S} = i_0\, \partial p_R^0 / \partial u^S \;,$$

$$p_R \wedge p_S = p_R^m i_m \wedge p_S^n i_n = p_R^m p_S^n i_0 (mno) \;,$$

$$p_R \wedge M_S = p_R^m i_m \wedge M_S^n i_n = p_R^m M_S^n i_0 (mno) \;;$$

les (A) donnent en égalant les coefficients de i_0:

$$(A_1) \frac{\partial p_R^0}{\partial u^S} - \frac{\partial p_S^0}{\partial u^R} = p_R^m p_S^n (mno) \;,$$

$$(A_2) \frac{\partial M_R^0}{\partial u^S} - \frac{\partial M_S^0}{\partial u^R} = (p_R^m M_S^n - p_S^m M_R^n)(mno) \;;$$

d. — Un déplacement d appliqué aux paramètres produit un déplacement $d\mathrm{M}$ de l'origine et di_a des axes, ayant pour expression (posant $\mathrm{M}^m = \mathrm{M}^m_r du^r = i_m \times d\mathrm{M}$, $p = p_r du^r$):

$$d\mathrm{M} = \mathrm{M}_r du^r = (\mathrm{M}_r \times i_m) i_m du^r = \mathrm{M}^m_r i_m du^r = \mathrm{M}^m i_m ,$$

$$di_a = \frac{\partial i_a}{\partial u^r} du^r = p_r \wedge i_a du^r = p_r du^r \wedge i_a = p \wedge i_a ;$$

en désignant par p^m les composantes de p sur (i_m) : $p^m = p \times i_m = p_r du^r \times i_m = p^m_r du^r$, on peut écrire:

$$di_a = p^c i_c \wedge i_a = (abc) i_b p^c ,$$

si l'on pose $di_a = \omega_{an} i_n$ (par exemple pp. 177 et suivantes de: *Théorie des groupes finis et continus...* de M. E. Cartan), le lien avec la notation ci-dessus s'obtient en observant que:

$$\omega_{an} = di_a \times i_n = p \wedge i_a \times i_n = p \times i_a \wedge i_n = p \times (anr) i_r = p^r (anr) ,$$

on en déduit que $\omega_{\mathrm{AA}} = 0$, $\omega_{an} = -\omega_{na}$, car $(anr) = -(nar)$, et que

$$p^a = \frac{1}{2} (amn) \omega_{mn} ;$$

e. — Introduisons maintenant un trièdre auxiliaire qui va servir à la représentation sphérique, son origine sera fixe. Pour un point N lié au trièdre, tel que $\mathrm{N} = \mathrm{M} + n$, on aura $\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u^{\mathrm{R}}} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u^{\mathrm{R}}} + n_{/\mathrm{R}} + p_{\mathrm{R}} \wedge n$, qui se réduit à $\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u^{\mathrm{R}}} = p_{\mathrm{R}} \wedge n$, et posons toujours $d\mathrm{N} = du^r \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u^r}$, on a:

$$d\mathrm{N} = p \wedge n ,$$

par suite $d\mathrm{N}^2 = (p \wedge n)^2 = p^2 n^2 - (p \times n)^2$, et si n est la normale unitaire à la surface $(n = i_3)$, $n^2 = 1$, $p \times n = p^3 = p^3_r du^r$, $(p \times n)^2 = p^3_r p^3_s du^r du^s$, $p^2 = p^m p^m = p^m_r p^m_s du^r du^s$, donc en désignant par une lettre grecque un indice qui ne prend pas la valeur 3,

$$d\sigma^2 = d\mathrm{N}^2 = (p \wedge n)^2 = p^\varepsilon_r p^\varepsilon_s du^r du^s ,$$

f. — Pour un point N lié au trièdre mobile (i_m) on aura, puisque $p \wedge n = p^b i_b \wedge n^c i_c = i^a (abc) p^b n^c$,

$$dN = dM + p \wedge n = i_a (M^a + (abc) p^b n^c) \ , \qquad (f)$$

g. — Si N était mobile par rapport à (i_m) on aurait (DARBOUX, L. I, ch. VII, éq. 4):

$$dN = i_a (dn^a + M^a + (abc) p^b n^c) \ .$$

II. — APPLICATIONS À QUELQUES QUESTIONS GÉNÉRALES.

a. — *Tangentes conjuguées.* — « Si le point M de la surface décrit une courbe on obtiendra la conjuguée de la tangente à cette courbe en prenant l'intersection du plan tangent en M avec le plan tangent infiniment voisin » (DARBOUX, L. V, ch. I), cette droite est l'axe des normales N — M en M, et N + dN — (M + dM) au point infiniment voisin de M, elle a donc pour vecteur, d'après (f):

$$j = (N - M) \wedge (N - M + dN - dM) =$$
$$= n \wedge (n + p \wedge n) = p(n \times n) - n(p \times n) = p - np^3 = p^\varepsilon i_\varepsilon \ ,$$

et un déplacement δM suivant la direction conjuguée de dM devra satisfaire à l'équation (puisque δM devra être suivant j):

$$\delta = j \wedge \delta M = (n \wedge dN) \wedge \delta M = p^\mu i_\mu \wedge M^\nu_r \delta u^r i_\nu =$$
$$= p^\mu M^\nu_r (\mu\nu 3) i_3 \delta u^r = (3\mu\nu) n p^\mu_\alpha M^\nu_\beta du^\alpha \delta u^\beta \ ,$$

c'est-à-dire:

$$(3\mu\nu) p^\mu_\alpha M^\nu_\beta du^\alpha \delta u^\beta = 0 \ .$$

Si les deux directions conjuguées coïncident, on obtient l'équation des asymptotiques:

$$j \wedge dM = 0 \qquad \text{ou} \qquad (3\mu\nu) p^\mu_\alpha M^\nu_\beta du^\alpha du^\beta = 0 \ ,$$

ou encore, ayant $j = n \wedge (p \wedge n)$ et $dN = p \wedge n$, on a $dN \times j = 0$ et, ici, j portant dM:

$$dM \times dN = 0 \ .$$