Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE
Autor: Lyche, R. Tambs
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515780

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

* * *

Au cours de ma conférence je vous ai donné un résumé d'une partie de la théorie de M. Morse. C'est à mon ami, le professeur Seifert, que je dois les simplifications essentielles que j'y ai apportées. Malgré ces simplifications, il y a encore dans ce que j'ai dit des démonstrations assez difficiles. Mais, je me suis efforcé de vous les dissimuler le plus possible.

Nos méthodes sont autres que celles bien connues de l'analyse classique. Quant à la rigueur, elles ne le cèdent en rien aux méthodes classiques. Il ne peut en être, en effet, autrement, car être rigoureux en mathématique ce n'est pas faire preuve de mesquinerie, tandis qu'au contraire, manquer de rigueur, c'est manquer d'imagination, c'est laisser échapper les possibilités de nouvelles découvertes.

UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

PAR

R. TAMBS LYCHE (Trondheim, Norvège).

---

1. — L'exemple donné par WEIERSTRASS d'une fonction continue qui n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable est trop compliqué pour que l'on puisse l'exposer dans un cours élémentaire d'Analyse. On doit à M. B. L. van der WAERDEN (*Math. Zeitschr.*, 32. Band, 1930, p. 474) un exemple de nature bien simple. Toutefois, pour être présentée d'une manière intelligible aux débutants, la démonstration exige des considérations un peu compliquées, bien qu'elles soient de nature élémentaire (voir par exemple E. LANDAU: *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung*, p. 73, où l'auteur examine un exemple de même espèce).

Vu l'importance d'une conception précise de la notion de dérivée, il ne semble pas inutile de pouvoir fournir un exemple où la démonstration peut être donnée en peu de lignes. Celui que

je propose ne diffère d'ailleurs en réalité de celui de M. van der Waerden que dans la façon de le définir.

2. — Soit x une quantité réelle quelconque, et posons

$$x = a + \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_i}} + \dots , \tag{1}$$

où a est un nombre entier et $\{\alpha_i\}$ une suite de nombres naturels croissants, en nombre limité ou non. On sait que cette représentation de x est unique, sauf dans le cas où la suite $\{\alpha_i\}$ est limitée:

$$x = \left[a + \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots\right] + \frac{1}{2^{\alpha_k}} . \tag{2}$$

Dans ce cas on a aussi la représentation

$$x = \left[a + \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots\right] + \frac{1}{2^{\alpha_k+1}} + \frac{1}{2^{\alpha_k+2}} + \dots \tag{2a}$$

Posons maintenant

$$f(x) = \frac{\alpha_1}{2^{\alpha_1}} + \frac{\alpha_2 - 2}{2^{\alpha_2}} + \frac{\alpha_3 - 4}{2^{\alpha_3}} + \dots + \frac{\alpha_i - 2(i-1)}{2^{\alpha_i}} + \dots . \tag{3}$$

On constatera sans peine que $f(x)$ est définie par cette formule pour toute valeur réelle de x, puisque un calcul facile montre que les deux définitions possibles, si x est de la forme (2) ou (2a), coïncident.

Ce dernier fait assure la continuité de la fonction $f(x)$ en tout point. En effet, en prenant $|h| < \frac{1}{2^n}$ les représentations de x et de $x + h$ coïncident dans les termes à exposants $< n$. Cela est évident dans le cas général (1), et aura encore lieu dans le cas (2 ou 2a), suivant que $h > 0$ ou $h < 0$. Par conséquent les expressions pour $f(x)$ et $f(x + h)$ coïncideront aussi dans les termes à exposants $< n$. La continuité est donc manifeste.

3. — Démontrons alors que $f(x)$ n'admet de dérivée en aucun point x. Nous considérons d'abord le cas où x est de la forme (2).

Prenons $h = \frac{1}{2^{\alpha_k + r}}$. Il s'ensuit

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\alpha_k + r - 2k}{2^{\alpha_k + r}},$$

d'où

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \alpha_k + r - 2k,$$

quantité qui tend vers l'infini avec r.

Prenons le cas plus général, où x est de la forme (1). Posons

$$x_1 = a + \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{\alpha_i}},$$

$$x_2 = a + \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{\alpha_i - 1}}.$$

On trouve alors

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{\sigma_i}{\rho_i}, \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{\alpha_i - 2i - \sigma_i}{1 - \rho_i},$$

en posant pour abréger

$$\rho_i = 2^{\alpha_i}\left[\frac{1}{2^{\alpha_{i+1}}} + \frac{1}{2^{\alpha_{i+2}}} + \ldots\right] \tag{4}$$

$$\sigma_i = 2^{\alpha_i}\left[\frac{\alpha_{i+1} - 2i}{2^{\alpha_{i+1}}} + \frac{\alpha_{i+2} - 2(i+1)}{2^{\alpha_{i+2}}} + \ldots\right]. \tag{5}$$

Supposons maintenant que $f(x)$ ait une dérivée $f'(x) = \lambda$ au point x. Alors on aurait d'abord

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\sigma_i}{\rho_i} = \lambda, \tag{6}$$

tandis que

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} - \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{\alpha_i - 2i - \frac{\sigma_i}{\rho_i}}{1 - \rho_i}$$

devrait tendre vers zéro en augmentant i. Mais cela exigerait

$$\lim_{i \to \infty} (\alpha_i - 2i) = \lambda$$

et α_i et $2i$ étant des entiers, on aurait, à partir d'une certaine valeur de i,

$$\alpha_i - 2i = \lambda.$$

Mais, en posant dans (4) et (5) $\alpha_i = 2i + \lambda$ on aurait

$$\rho_i = \frac{1}{3}, \qquad \sigma_i = \frac{\lambda + 2}{3},$$

donc

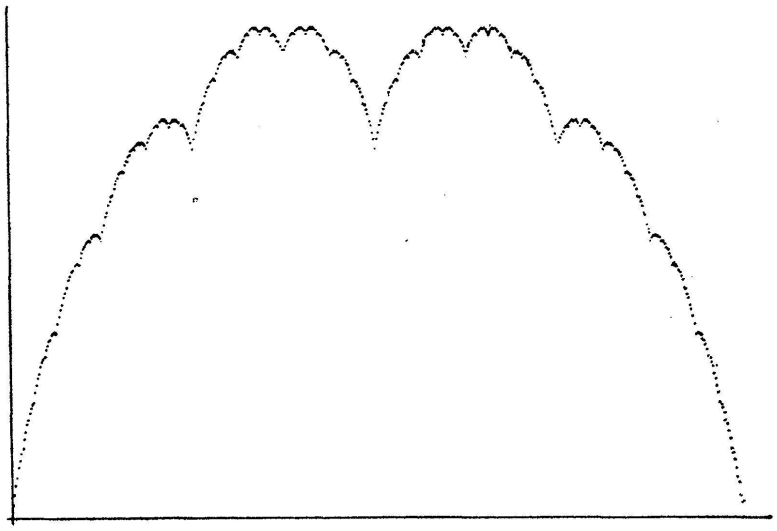
$$\frac{\sigma_i}{\rho_i} = \lambda + 2,$$

ce qui est impossible d'après (6).

4. — Remarquons enfin que la fonction $f(x)$ est la fonction qu'on pourrait définir de la manière suivante: en désignant par $g(x)$ l'écart du nombre x au nombre entier le plus proche, on a

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{2} g(2x) + \frac{1}{2^2} g(2^2 x) + \ldots + \frac{1}{2^n} g(2^n x) + \cdots,$$

donc une fonction de même espèce que celle de M. van der Waerden.



La représentation graphique de la fonction $f(x)$ est donnée dans la figure, en faisant usage des points correspondant aux valeurs de x de la forme (2) avec $a = 0$ et $k \leqslant 9$. Bien que tous ces points soient des minima sur la courbe, ils donnent une idée assez complète de la courbe en question, puisque les points intermédiaires ont des ordonnées qui ne diffèrent que peu des ordonnées des points de la figure.