Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA «COURBE CATOPTRIQUE » D'EULER
Autor: Loria, Gino
Kapitel: IV. — La première solution d'Euler.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515787

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IV. — La première solution d'Euler.

6. — Les formules à appliquer maintenant sont les suivantes (voyez la fig. 2):

$$\mathrm{TS} = -s\,, \qquad \mathrm{CS} = a + v \quad (v \text{ fonction impaire de } s)$$

$$\sin \mathrm{CMO} = \frac{2(a+v)s}{(a+v)^2 + s^2}\,, \qquad \cos \mathrm{CMO} = \frac{(a+v)^2 - s^2}{(a+v)^2 + s^2}$$

$$\mathrm{CM} = a + v + \frac{s^2}{a+v}\,, \qquad \mathrm{MO} = \frac{2s\,ds}{dv} + a + v - \frac{s^2}{a+v}$$

$$\mathrm{CO} = \frac{2s\sqrt{dv^2 + ds^2}}{dv}\,, \qquad \operatorname{tg} \mathrm{CMO} = \frac{dv}{ds}\,.$$

Nous choisissons à présent comme axe une droite quelconque AB passant par le point C. Soit R son intersection avec le rayon réfléchi MM* et ω l'angle que celui-ci forme avec l'axe; si l'on pose $\cos \omega = \frac{u}{c}$ (c étant une constante différente de O), on aura $\sin \omega = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c}$, $d\omega = -\frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}}$ et u sera aussi une fonction impaire de s. Soit $m\mathrm{O}r$ le rayon réfléchi consécutif au rayon MOR; on aura $\widehat{\mathrm{C}rm} = \omega + d\omega$ et ensuite $\widehat{\mathrm{MO}m} = d\omega$. Mais on a déjà trouvé $\widehat{\mathrm{MO}m} = \frac{dr}{ds} = (\text{car } r = a + v)\frac{dv}{ds}$, $d\omega = \frac{dv}{s} = -\frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}}$; donc on conclut:

$$s = -\frac{dv \,.\, \sqrt{c^2 - u^2}}{du}\,;$$

u sera une fonction impaire de s, donc inversement s et v seront des fonctions impaires de u.

On observe à présent que dans le triangle CRM on connaît les angles et le côté CM; en conséquence le théorème des sinus nous donne

$$\mathrm{CR} = -\frac{2c \,.\, dv}{du}\,, \qquad \mathrm{RV} = -\frac{2u \,.\, dv}{du}$$

et ensuite

$$\mathrm{MR} = a + v - \frac{2u \,.\, dv}{du} - \frac{(c^2 - u^2) \,.\, dv^2}{(a+v) \,.\, du^2}\,.$$

Menons la droite MP perpendiculaire à l'axe ACB; comme on a MP = MR . sin ω, à cause des formules qu'on a trouvées, on peut écrire

$$\mathrm{MP} = \left(a + v - 2\frac{u \,.\, dv}{du} - \frac{dv^2}{du^2}\,\frac{c^2 - u^2}{a + v}\right)\frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c},$$

où le signe ambigu du radical correspond à la symétrie de la courbe catoptrique par rapport à l'axe AB. On a encore

$$\mathrm{RP} = \mathrm{MR}\cos\omega = \frac{u(a + v)}{c} - \frac{2u^2 \,.\, dv}{c \,.\, du} - \frac{u(c^2 - u^2)}{c(a + v)}\,\frac{dv^2}{du^2}$$

et, à cause de la valeur de CR,

$$\mathrm{CP} = \frac{dv^2}{du^2}\cdot\frac{u(c^2 - u^2)}{c(c + v)} - 2\frac{dv}{du}\,\frac{c^2 - u^2}{c} - \frac{u(a + v)}{c}.$$

Si donc nous prenons comme premier axe d'un système cartésien la droite AB et comme origine le point C, on aura CP = x et MP = y.

Euler trouve convenable de changer dans les formules précédentes le signe de v; par conséquent il écrit comme il suit les formules qui donnent la solution du problème:

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{u(a - v)}{c}\left[1 - \frac{du}{dv}\,\frac{c^2 - u^2 + c\sqrt{c^2 - u^2}}{u(a - v)}\right]\left[1 - \frac{du}{dv}\,\frac{c^2 - u^2 - c\sqrt{c^2 - u^2}}{u(a - v)}\right] \\ y &= \frac{c^2 - u^2}{c(a - v)}\left[a - v + (c + u)\frac{dv}{du}\right]\left[a - v - (c - u)\frac{dv}{du}\right]\ ;\ ^{1} \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

en supposant que ces formules déterminent le point M de la première réflexion, celles qui se rapportent au point M* de la seconde s'en déduisent en échangeant les signes de u, v et du radical.

Remarque. — A toute équation $f(u, v) = 0$ entre u et v correspond une courbe catoptrique particulière; si f est une fonction algébrique, on peut la supposer rationnelle et entière; la même chose arrivera alors par rapport aux dérivées $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$; cela prouve qu'en substituant à $\frac{dv}{du}$ le rapport $-\frac{\partial f}{\partial u} : \frac{\partial f}{\partial v}$ les for-

[1] Comme u et v sont liées par une relation, les équations (7) nous offrent peut-être le premier exemple de la représentation des coordonnées d'une courbe *à l'aide de deux paramètres, entre lesquels il existe une relation connue.*

mules (7) deviendront algébriques en u, v; entre elles et l'équation $f(u, v) = 0$ on pourra éliminer ces quantités et on arrivera à une équation également algébrique en x, y: *cela prouve l'existence d'un nombre indéfini de courbes catoptriques, toutes algébriques.*

V. — Quelques conséquences des formules trouvées. Exemples.

7. — Les formules (7) mènent à toutes les propriétés de la courbe catoptrique; bornons-nous à citer celles dont parle Euler. La courbe catoptrique coupe orthogonalement l'axe en deux points dont la distance est $2a$. L'ordonnée EC du point C est fournie en posant $x = 0$ dans la première des formules (7); sa valeur est donc

$$\frac{-2c(a-v)\left(\sqrt{c^2-u^2} \pm c\right)}{u^2} ;$$

tandis que les points d'ordonnées *maxima* sont donnés par les formules

$$x = c\frac{dv}{du}, \qquad y = \frac{c\sqrt{c^2-u^2}}{u}\frac{dv}{du},$$

etc.[1]

Euler remarque encore que des formules exposées on peut tirer aisément la représentation analytique de la caustique de la

---

[1] Les mêmes formules permettraient l'étude des relations géométriques ayant lieu entre la courbe catoptrique et le point lumineux C. Par exemple, elles portent à la conclusion que *ce point n'appartient jamais à cette courbe.* En effet, des équations

$$-\frac{u(a-v)}{c} + 2\frac{c^2-u^2}{c}\frac{dv}{du} + \frac{u(c^2-u^2)}{c(a-v)}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

$$a - v + 2u\frac{dv}{du} - \frac{c^2-u^2}{a-x}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0,$$

on tire, en ajoutant à la première la seconde multipliée par $\frac{u}{c}$,

$$2c\frac{dv}{du} = 0 ;$$

comme $c \neq o$, on a $\frac{dv}{du}$ nul et les équations précédentes donnent $a - v = 0$; en conséquence les (7) deviennent en général $x = 0$, $y = 0$ et la courbe catoptrique se réduirait au point lumineux.