II. — Introduction des vecteurs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

symétrie (un mirage) par rapport à l'axe des x l'on obtient une ligne droite dont l'équation est

$$y = -\frac{b}{a}x ,$$

ce qui permet de constater que toutes les lignes obliques qui unissent l'origine à d'autres nœuds peuvent être représentées par l'équation

$$y = \alpha x , \qquad \text{ou} \qquad \alpha \gtrless 0 .$$

8. — L'on constate ensuite par une translation de (0, 0) sur (p, q) qu'une ligne droite qui traverse (p, q) et qui est parallèle à la ligne $y = \alpha x$, peut être représentée par l'équation

$$y - q = \alpha(x - p) ,$$

où α s'appelle la pente de la ligne.

Puisque le point (a, b) se déplace sur $(-b, a)$ par une rotation de 90° du côté positif, autour de l'origine, l'on constate que les pentes de deux droites perpendiculaires peuvent s'exprimer par $\frac{b}{a}$ et $-\frac{a}{b}$, c'est-à-dire que le produit des pentes est égal à -1.

9. — L'on joint à ces éléments préliminaires de la géométrie analytique du réseau quadrillé des exemples variés, tels que détermination de lignes droites par deux points, de lignes perpendiculaires l'une sur l'autre, de lignes parallèles, du point d'intersection de deux lignes, etc...

Mais tout notre domaine de travail n'est toujours que le réseau quadrillé empirique dans le plan à dessiner, où les coordonnées sont des nombres entiers, en introduisant cependant — par une réduction de l'unité du réseau — les nombres fractionnaires au fur et à mesure que les applications le nécessitent.

II. — Introduction des vecteurs.

10. — Nous travaillons toujours à l'aide du système de coordonnées introduit dans le chapitre précédent. Pour abréger, introduisons les notions suivantes:

Le point « a » a pour coordonnées (a_1, a_2). La translation que l'on obtient en déplaçant l'origine sur le point a se désigne aussi par a. Elle a cet effet: les abscisses et ordonnées de tous les points s'accroissent respectivement de a_1 et a_2.

Un vecteur a signifie un segment qui commence à l'origine et finit au point a. On désigne ainsi le vecteur par la même lettre a que son extrémité.

La lettre a sert donc de notation pour le point, la translation ou le vecteur, suivant les circonstances. a_1 et a_2 désignent de même les coordonnées du point, de la translation, ou du vecteur.

11. — De deux vecteurs $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, l'on dérive un nouveau vecteur c que l'on appelle *la somme de a et b*. Ceci signifie que l'on obtient la translation c en combinant les translations a et b. Nous savons d'après ce qui précède que l'on obtient les coordonnées de c, c_1 et c_2, en additionnant les coordonnées de a et b. L'on écrit

$$c = a + b \ ,$$

ce qui signifie en coordonnées,

$$c_1 = a_1 + b_1 \ , \qquad c_2 = a_2 + b_2 \ .$$

Si les vecteurs a et b se trouvent sur deux lignes différentes, c est diagonale de leur parallélogramme. S'ils se trouvent sur la même ligne, l'on obtient la somme en plaçant l'un des vecteurs en prolongation de l'autre (en avant ou en arrière suivant son orientation).

Lorsqu'on additionne les vecteurs, les abscisses s'additionnent entre elles et les ordonnées de même. L'ordre des vecteurs à additionner est indifférent; de même lorsqu'il y en a plusieurs.

Un vecteur spécial est le vecteur zéro qui commence et finit à l'origine. On le désigne par O, ou (0, 0), ou simplement par 0; la translation correspondante est nulle (immobilité).

On dit que deux vecteurs sont opposés lorsque leur somme est 0. Les translations correspondantes se neutralisent alors réciproquement. Au vecteur $a = (a_1, a_2)$ correspond le vecteur opposé $(-a_1, -a_2)$. On le désigne par $(-a)$.

12. — A propos de l'addition des vecteurs l'on peut aussi parler de soustraction, en établissant que

$$a - b = c$$

doit signifier que

$$c + b = a \ .$$

On s'aperçoit tout de suite que la soustraction d'un vecteur s'effectue par la soustraction de ses coordonnées, ou encore que l'on soustrait un vecteur en additionnant le vecteur opposé. Il s'ensuit aussi qu'en soustrayant un vecteur d'un autre vecteur on obtient un vecteur dont la grandeur et l'orientation s'expriment par le segment qui commence à l'extrémité du premier vecteur et finit à l'extrémité du second. Cette façon intelligible d'exprimer la soustraction a une grande importance. Et pour pouvoir l'utiliser entièrement nous étendrons la dénomination des vecteurs de telle sorte que nous parlerons du *vecteur* $\overline{AB}$ *d'un point quelconque* A *à un point quelconque* B *dans le réseau*, en désignant par cela le vecteur dont la grandeur et l'orientation sont représentées par ce segment.

L'on écrit alors

$$\overline{AB} = B - A \ ;$$

l'on peut dire naturellement que cette dénomination conduit à ce que l'on devrait écrire $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$ pour A et B, mais pour les vecteurs dont l'origine est O nous maintiendrons la désignation courte, c'est-à-dire par l'extrémité seule.

L'on a $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ ce qui exprime seulement que les trois translations se neutralisent.

13. — D'après l'emploi habituel du nombre naturel m, m fois le vecteur a doit désigner $a + a + \ldots + a$ (m fois).

Nous écrivons

$$ma = a + a + \ldots + a \, (m \text{ fois}) \ , \qquad \text{d'où} \qquad ma = (ma_1 \, , \, ma_2) \ .$$

D'après l'emploi habituel de la fraction, $\frac{1}{q}\, a$ doit signifier le

vecteur qui multiplié par q produit a, c'est-à-dire

$$\frac{1}{q} a = \left(\frac{1}{q} a_1 , \frac{1}{q} a_2\right) ,$$

d'où

$$\frac{p}{q} a = \left(\frac{p}{q} a_1 , \frac{p}{q} a_2\right) .$$

De plus, d'après l'emploi habituel du nombre négatif $(-m)$, $(-m)\, a$ doit avoir la même signification que $m\ (-a)$, c'est-à-dire

$$(-m)\, a = (-ma_1 , -ma_2) .$$

L'on peut résumer ces règles en une seule: lorsque λ est un scalaire (nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif) λa doit signifier $(\lambda a_1, \lambda a_2)$: on multiplie un vecteur par un scalaire λ en multipliant ses coordonnées par λ. On dit aussi que l'on multiplie le point a par λ. Si l'on multiplie tout un système de nœuds par λ, tous les vecteurs du système seront multipliés par λ. On dit que le nouveau système de nœuds est homothétique du système initial dans le rapport λ.

14. — Si l'on a deux vecteurs a et b qui satisfont à l'équation

$$b = \lambda a ,$$

l'on écrit aussi

$$\frac{b}{a} = \lambda ;$$

ceci pour s'exprimer ainsi: le rapport entre b et a est égal à λ, mais on peut seulement employer cette façon de parler pour exprimer une relation entre deux vecteurs quand ceux-ci se trouvent sur la même droite ou sur des droites parallèles.

$0 \,.\, a$ signifie naturellement 0.

15. — A l'aide des coordonnées des vecteurs a et b, l'on démontre tout de suite que

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b ,$$

et aussi

$$\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b .$$

L'on remarque de plus que

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \ , \qquad \text{et} \qquad \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a \ ,$$

λ et μ étant deux scalaires quelconques.

Applications. — 1° Trouver le milieu d'un segment dont les extrémités sont a et b:

$$m = a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b) \ .$$

2° Partager en trois parties égales un segment $a\,b$. Les points intermédiaires étant m et n l'on trouve

$$m = a + \frac{1}{3}(b - a) = \frac{1}{3}(2a + b)$$

$$n = a + \frac{2}{3}(b - a) = \frac{1}{3}(a + 2b) \ .$$

On en déduit que le point $\frac{1}{3}(a + b + c)$ se trouve sur les trois médianes du triangle $a\,b\,c$ et divise chacune d'elles dans le rapport 1 : 2.

3° Partager le segment $a\,b$ dans le rapport $p : q$.

$$x = a + \frac{p}{p + q}(b - a) = \frac{pb + qa}{p + q} \ .$$

4° Tracer un vecteur qui commence en c et est égal à $\lambda\,\overline{a\,b}$.

$$x = c + \lambda(b - a) \ .$$

5° Des relations $\overline{AB} = \lambda\,.\,\overline{ab}$, $\overline{BC} = \lambda\,.\,\overline{bc}$, on déduit par addition $\overline{AC} = \lambda\,.\,\overline{ac}$. Il en résulte l'existence de triangles où les côtés correspondants sont parallèles et les vecteurs correspondants sont proportionnels.

16. — *Vecteur viré.* — *Vecteur orthogonal.*

Nous définissons le vecteur *viré* d'un vecteur $a = (a_1, a_2)$ par la relation

$$\widehat{a} = (-a_2, a_1) \ ;$$

$\widehat{a}$ est donc le vecteur que l'on obtient en faisant subir au vecteur a, du côté positif, une rotation de 90° autour de l'origine.

Un vecteur quelconque orthogonal à a ($\perp a$) s'exprime alors par

$$\lambda \widehat{a} = (-\lambda a_2, \lambda a_1) .$$

L'on remarque que $\widehat{\widehat{a}} = -a$, et $\widehat{a - b} = \widehat{a} - \widehat{b}$.

Si l'on fait tourner le point a d'un angle droit autour du point b, du côté positif, le nouveau point obtenu sera

$$b + \widehat{a - b} .$$

Si l'on mène du point c le vecteur viré de $\overline{ab}$, son extrémité peut s'exprimer ainsi

$$c + \lambda \widehat{b - a} , \qquad \text{ou} \qquad c + \lambda(\widehat{b} - \widehat{a}) .$$

Si l'on construit un triangle rectangle isocèle $a\,b\,c$ (fig. 2) du côté positif de $\overline{ab}$, $\overline{ab}$ étant la base, l'on obtient

$$c = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(\widehat{b} - \widehat{a}) .$$

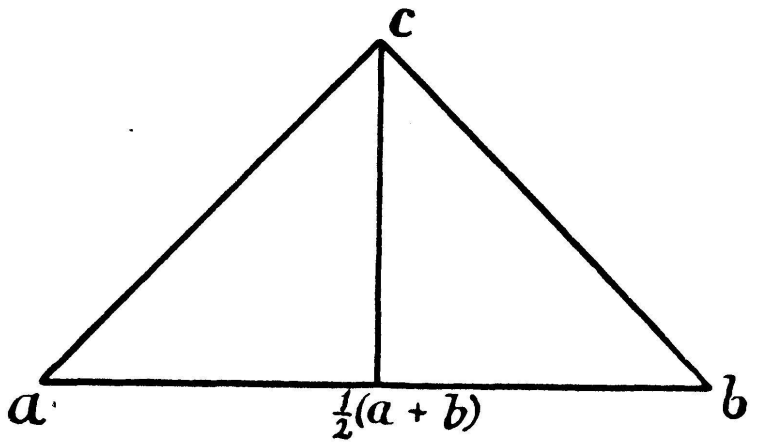

Fig. 2.

17. — Nous employons ceci pour examiner la figure PQRS, que l'on obtient en construisant sur les côtés du quadrilatère ABCD comme hypoténuses des triangles rectangles isocèles ABP, BCQ, CDR, DAS orientés positivement (fig. 3). Nous

trouvons alors:

$$P = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{A})$$

$$Q = \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(\widehat{C} - \widehat{B})$$

$$R = \frac{1}{2}(C + D) + \frac{1}{2}(\widehat{D} - \widehat{C})$$

$$S = \frac{1}{2}(D + A) + \frac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{D}) \cdot$$

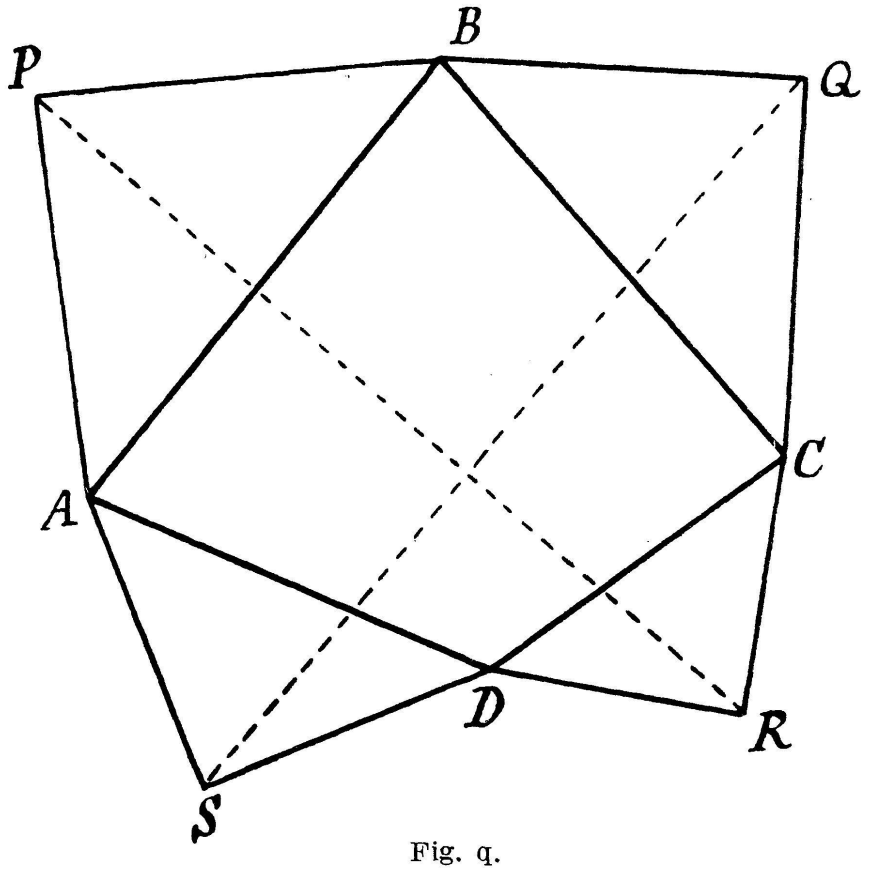

Fig. q.

D'où l'on tire:

$$\overline{PR} = \frac{1}{2}(C + D - A - B) + \frac{1}{2}(\widehat{D} + \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C})$$

$$\overline{QS} = \frac{1}{2}(D + A - B - C) + \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C} - \widehat{D}) \ .$$

Il en résulte

$$\widehat{\overline{QS}} = \overline{PR}$$

c'est-à-dire, *les deux segments* PR *et* QS *sont égaux et orthogonaux l'un sur l'autre.* En même temps l'on obtient leur orientation;

en effectuant une rotation de 90° du côté positif, QS aura la même orientation que PR.

Pour que le quadrilatère PQRS devienne un carré, il faut que les deux segments PR et QS aient le même milieu, c'est-à-dire

$$Q + S = P + R$$

d'où l'on déduit grâce aux relations ci-dessus

$$\widehat{C} - \widehat{B} + \widehat{A} - \widehat{D} = \widehat{B} - \widehat{A} + \widehat{D} - \widehat{C} , \quad \text{ou} \quad D - C = A - B ,$$

c'est-à-dire: le quadrilatère ABCD doit être un parallélogramme.

III. — Multiplication des vecteurs.

18. — *On appelle produit de deux vecteurs le scalaire que l'on obtient en additionnant le produit des abscisses entre elles et le produit des ordonnées entre elles.*

Ecrivons:

$$a \,.\, b \quad \text{ou} \quad ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 \,.$$

Il en résulte que

$$ab = ba ,$$

$$a(b + c) = ab + ac ,$$

$$a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0 ,$$

$$a\widehat{a} = 0 , \qquad a \,.\, \lambda\widehat{a} = 0 \,.$$

19. — De l'équation

$$a(b + \lambda\widehat{a}) = ab ,$$

il s'ensuit que le produit ab reste invariable lorsque l'extrémité de l'un des vecteurs parcourt une droite perpendiculaire à l'autre. Il en résulte en particulier que *le produit ab est égal au produit de l'un des vecteurs et la projection de l'autre vecteur sur le premier.*

$a \,.\, b = 0$ signifie donc que les deux vecteurs a et b sont orthogonaux ou que l'un d'eux (ou les deux) est égal à zéro.