Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1942-1950)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÉALITÉS ET SYMBOLISMES EN MATHÉMATIQUES
Autor: Lurent, Henri
Kapitel: VII
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515805

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

nel que le nombre 0 n'a pas d'inverse, donc, que les nombres fractionnaires de la forme:

$$\frac{a}{b-c}$$

cessent d'exister si $c = b$ avec $a \gtrless 0$.

Reprenons l'intervalle de -1 à $+1$ dans l'ensemble dénombrable des entiers. Dans cet intervalle prennent place les inverses de tous les nombres entiers, tant négatifs que positifs. Rangés par ordre de grandeur croissante (au sens algébrique de ce qualificatif), ils se présentent ainsi:

$$-1\,,\quad -1/2\,,\quad -1/3\,,\quad -1/4\,,\quad \ldots 1/4\,,\quad 1/3\,,\quad 1/2\,,\quad 1\,.$$

Cet ensemble transfini dénombrable des inverses des entiers est un sous-ensemble du continu; en effet, soit par exemple une droite infinie graduée dans les deux sens à partir de 0; l'ensemble de ses points a la puissance du continu; à chaque terme de l'ensemble des inverses des entiers correspond un point, et un seul de la droite, celui qui a ce terme pour abscisse.

Mais d'un ensemble ayant la puissance du continu, on peut extraire un ensemble transfini dénombrable de sous-ensembles dont chacun est dénombrable; en voici un second exemple:

$$-1\,,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \ldots\ldots\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad 1$$

et le lecteur multipliera aisément les exemples, à volonté.

Dans chacun, on peut imaginer un terme positif ou négatif aussi petit que l'on veut, en valeur absolue; la partie négative comme la partie positive de l'intervalle $(-1, +1)$ a pour limite 0.

Si, arrivés là, nous acceptons le *postulat* suivant: *ce qui est vrai de tous les ensembles dénombrables, qui sont des sous-ensembles d'un ensemble* E *ayant la puissance du continu, reste vrai de cet ensemble* E, nous construirons, par des passages à la limite, le calcul différentiel et le calcul intégral.

VII

Depuis Descartes, l'algèbre sert à étudier des lignes et des surfaces, considérées comme des ensembles transfinis de points,

ayant la puissance du continu; ce qui a été possible, grâce au fait signalé plus haut: il existe une correspondance biunivoque entre les points d'une ligne ou d'une surface et les termes de l'ensemble des nombres réels. L'exploitation de ce fait, par Descartes et ses continuateurs, a valu à la géométrie et à la mécanique, le développement considérable qui les ont enrichies depuis le XVII^e siècle.

C'est le moment pour nous de faire remarquer le caractère abstrait, symbolique si l'on veut, des êtres géométriques par rapport aux êtres réels du monde physique.

Les êtres géométriques, lignes et surfaces, sont abstraits des réalités sensibles; cette abstraction leur donne le caractère d'êtres dont les ensembles sont transfinis; car on peut en concevoir et en définir autant de sous-ensembles que l'on veut, chaque définition d'une ligne ou d'une surface étant celle d'un ensemble transfini, ne fût-ce que parce que cette ligne ou surface peut être imaginée à telle échelle que l'on veut.

Comment se forment les concepts géométriques à partir du concret sensible ? Soit le concept *ligne droite.* On le présente aux débutants en géométrie à partir d'un fil tendu entre deux points plus ou moins éloignés: d'abord une ficelle assez épaisse pour être vue de toute la classe, puis de fils plus fins observés par des groupes d'élèves, encore par le rappel de souvenirs, par exemple un fil tendu entre deux nœuds d'une toile d'araignée. La synthèse des observations de pareils objets est formulée soit dans la définition négative d'Euclide (« longueur sans largeur également interposée entre ses points » — traduction Peyrard), soit dans celle plus compréhensive d'Archimède (« la droite est la plus courte des lignes ayant les mêmes extrémités » — traduction Ver Eecke).

Soit, parmi les surfaces, celles que les manuels, traditionnellement, proposent la première à l'étude: *le plan.*

Quelles opérations permettent de classer parmi les plans la surface d'une table bien dressée ou celle d'un miroir ? Un fil fixé à un point du contour, puis tendu peut balayer cette surface sans être déformé par des aspérités ni sans enjamber des creux, c'est-à-dire, en restant en contact par chacun de ses points avec la surface de la table ou du miroir; et ceci pour deux

points d'attache différents au contour (une surface conique réalisant cette condition pour un seul de ses points, le sommet). Reproduite par l'imagination, en faisant abstraction de l'épaisseur du fil et en imaginant la surface prolongée indéfiniment tout en conservant la même propriété, cette expérience a pour conclusion le concept de *plan indéfini.*

Si l'on remarque que, sur la Terre approximativement sphérique, ce travail d'imagination ne peut être effectivement réalisé, on est à l'une des sources possibles de la relativité einsteinienne.

Nous pourrions redire de toute autre ligne ou surface géométrique quelque chose d'analogue, si la nature offrait à notre observation beaucoup d'occasions de faire pareil travail. En fait, la géométrie construit ses surfaces à partir de lignes et ses lignes à partir de points. Le point étant, selon Euclide, ce qui n'a aucune partie, la géométrie est fondée sur ce paradoxe: construire toute étendue à partir de ce qui n'a pas d'étendue On s'étonne que les sceptiques n'aient pas autrement exploité ce paradoxe !

VIII

Ce n'est pas à un sceptique qu'est dû un autre paradoxe, celui du philosophe anglais Bertrand Russell: « En mathématiques, on ne sait jamais de quoi l'on parle ni si ce qu'on dit est vrai. »

C'est l'algèbre que vise ce paradoxe, et c'est à travers l'algèbre appliquée à la géométrie qu'il atteint cette dernière.

On ne sait de *quoi* l'on parle en mathématiques, si *quoi* désigne un objet sensible. Une fois mis en équation le problème dont l'énoncé nomme de pareils objets, l'algébriste ne manie plus que des symboles substitués aux objets; il ne reviendra à ces derniers que pour interpréter en physique, en chimie, en finances, en statistique... le résultat de ses combinaisons de symboles. Et le paradoxe de Russell disparaît alors, parce que les symboles algébriques ont été dotés de propriétés appartenant au moins approximativement à des réalités: celles d'égalité et celles d'addition.