Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 40 (1951-1954)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE DES SOUS-VARIÉTÉS D'UN ESPACE EUCLIDIEN A PLUSIEURS DIMENSIONS
Autor: Chern, Shiing-Shen
Anhang: Appendice.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515809

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Appendice.

Nous nous proposons de donner ici les formules concernant les courbures $K(x)$ et $K^*(x)$ et une démonstration du théorème suivant, énoncé dans le nº 6: L'inégalité (32) entraîne que la variété compacte M a ses nombres de Betti modulo 2 tous nuls pour les dimensions $1, 2, \ldots, n-1$.

Nous utilisons les notations du texte. Désignons par $\varphi = \sum_s \varphi_s e_s$ un vecteur unitaire normal. Alors la forme (13) est la seconde forme fondamentale de la projection orthogonale $M(\varphi)$ de M dans l'espace linéaire à $n+1$ dimensions déterminé par φ et par le plan tangent à M en x. Par définition, la courbure $G(x, \varphi)$ de Gauss-Kronecker de $M(\varphi)$ est égale au déterminant:

$$G(x, \varphi) = \left| \sum_s \varphi_s A_{sij} \right| . \tag{43}$$

Pour calculer l'intégrale dans (23) il faut développer ce déterminant. Le développement sera un polynome homogène de degré n en φ_s, dont un terme général est de la forme

$$\pm \varphi_{s_1} \ldots \varphi_{s_n} A_{s_1 i_1 j_1} \ldots A_{s_n i_n j_n} = \pm \varphi_{t_1}^{\lambda_1} \ldots \varphi_{t_k}^{\lambda_k} A_{s_1 i_1 j_1} \ldots A_{s_n i_n j_n} ,$$

où les indices $t_1, \ldots, t_k$ sont tous distincts. Pour qu'un terme donne une valeur non nulle dans l'intégrale (23) il faut que les exposants $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ soient tous pairs. On est conduit ainsi à la démonstration du résultat que l'intégrale (23) est nulle si n est impair et égale à $K(x)$ si n est pair.

Pour exprimer l'élément de volume sur l'hypersphère de rayon unité autour de l'origine O, avec le point courant φ, on prend un repère $a_1, \ldots, a_{n+N}$, dont le dernier vecteur a_{n+N} est identique à φ. Alors l'élément de volume est donné par l'expression

$$\prod_{1 \leq t \leq n+N-1} (a_t \, d\varphi) = \prod_{1 \leq t \leq n+N-1} (a_t \, da_{n+N}) ,$$

où le produit est au sens du produit extérieur. Il est sous-entendu que ce produit est indépendant du choix des $n + N - 1$ pre-

miers vecteurs. Dans le cas présent où ϱ est un vecteur normal en $x \in M$ nous choisissons $a_i = e_i(x)$ et posons

$$a_r = \sum_s u_{rs}\, e_s(x) \ ,$$

de sorte que $u_{n+N,\,s} = \varrho_s$. On trouve alors

$$da_{n+N} = d\varrho = \sum_s d\varrho_s \cdot e_s + \sum_s \varrho_s\, de_s \ ,$$

d'où on déduit

$$d\varrho \cdot a_i = \sum_s \varrho_s\, \omega_{si} = -\sum_{s,j} \varrho_s\, A_{sij}\, \omega_j \ ,$$

$$d\varrho \cdot a_r = \sum_s d\varrho_s\, u_{rs} \ + \ \sum_{s,t} \varrho_s\, u_{rt}\, \omega_{st} \ .$$

Il s'en suit que

$$\prod_{1 \leqq t \leqq n+N-1} (a_t\, d\varrho) = \pm \left| \sum_s \varrho_s\, A_{sij} \right| d\sigma_{N-1}\, dV \ .$$

Il s'agit d'intégrer la valeur absolue de cette expression pour tous les vecteurs normaux unitaires en tous les points $x \in M$. Notre discussion dans le n° 6 implique que cette intégrale est $\geqq 2\, c_{n+N-1}$. Utilisant l'expression (30) pour la courbure totale $K^*(x)$, on obtient l'inégalité (31).

Maintenant supposons que l'inégalité (32) soit valable. Cela implique que les directions auxquelles la fonction coordonnée n'a qu'un maximum et un minimum ont une mesure positive. Il s'ensuit qu'il y a une fonction coordonnée non constante qui n'a qu'un maximum et un minimum. Des inégalités de Morse résulte alors l'énoncé au début de cet appendice.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Allendoerfer, C. B., Rigidity for spaces of class greater than one, *Amer. J. Math.* 61, 633-44 (1939).

[2] —— and Weil, A., The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, *Trans. Amer. Math. Soc.* 53, 101-129 (1943).

[3] Blaschke, W., Sulla geometria differenziale delle superficie S_2 nello spazio euclideo S_4, *Ann. Math. Pura Appl.* (4), 28, 205-209 (1949).

[4] Chern, S., On a theorem of algebra and its geometrical application, *J. Indian Math. Soc.* 8, 29-36 (1944).