Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 1 (1955)
Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF
Autor: Ostrowski, A.
Kapitel: III. Construction d'une solution de l'équation d'Abel.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31365

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

vertu de (II, 18), la relation (II, 19) est aussi valable pour tout $x \geqq a_0$ et l'on a

$$f(x) \leqq C \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} \qquad (x \geqq a_0) \cdot$$

La série (II, 7) est convergente avec (II, 5).

Les assertions *a*) et *b*) sont complètement démontrées.

III. Construction d'une solution de l'équation d'Abel.

Dans cette section nous allons construire avec Ermakof, pour chaque fonction $\Psi(x)$ satisfaisant aux conditions du lemme de la section II une fonction $\varphi(x)$ jouissant des propriétés exigées dans ce lemme, sauf, pour le moment, les propriétés γ) et δ).

Désignons l'inverse de la fonction $y = \Psi(x)$ $(x \geqq a_0)$ par

$$x = \psi(y) \qquad (y \geqq a_1 = \Psi(a_0)) \ .$$

La fonction $\psi(y)$ est continue et croissante pour $y \geqq a_1$, et l'on a

$$\psi'(y) = \frac{1}{\Psi'(x)} \qquad (y = \Psi(x) \ , \quad x \geqq a_0 \ , \quad y \geqq a_1) \ . \qquad \text{(III, 1)}$$

Posons

$$\psi_0(x) = x \ , \quad \psi_1(x) = \psi(x) \ , \quad \psi_2(x) = \psi(\psi(x)) \ , \quad \ldots \ ,$$
$$\psi_n(x) = \psi(\psi_{n-1}(x)) \ .$$

Alors $\psi_n(x)$ est l'inverse de la fonction $\Psi_n(x)$ donnée par (II, 9). Donc, en résolvant (II, 11) par rapport à x^*, on a

$$x^* = \psi_n(x) \ . \qquad \text{(III, 2)}$$

La valeur de x donnée par (II, 11) parcourt évidemment l'intervalle

$$a_n \leqq x < a_{n+1} \ , \qquad \text{(III, 3)}$$

où les a_ν sont définies par (II, 10).

Donc, dès qu'un $x \geqq a_0$ est donné, l'entier n et le nombre x^* dans l'intervalle $\langle a_0, a_1)$ sont univoquement déterminés par la relation (II, 11).

Posons maintenant

$$\varphi(x) = n + 1 + \frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0} \qquad (x \geqq a_0) , \tag{III, 4}$$

où l'entier n est déterminé par (III, 3) et x^* par (III, 2). Il résulte de (II, 11)

$$\Psi(x) = \Psi_{n+1}(x^*) ,$$

donc

$$\varphi(\Psi(x)) = n + 2 + \frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0} = \varphi(x) + 1 .$$

La fonction $\varphi(x)$ donnée par (III, 4) satisfait donc à l'équation d'Abel.

D'autre part, si x tend vers ∞, le nombre n déterminé par (III, 3) tend aussi vers ∞. Donc, $\frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0}$ étant situé dans l'intervalle $\langle 0, 1)$, on a $\varphi(x) \longrightarrow \infty$ $(x \longrightarrow \infty)$.

La fonction $\psi_n(x)$ est continue pour tout entier n. Donc, tant que x reste dans l'intervalle (III, 3), x^* et $\varphi(x)$ sont continus.

On a évidemment pour tout $n \geqq 0$

$$\varphi(a_n) = n + 1 .$$

Donc $\varphi(x)$ est positive et continue pour $x > a_0$ autant que x est différente de chaque a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. $\varphi(x)$ est, de plus, *continue de droite* en tout point a_n $(n = 0, 1, \ldots)$.

Je dis que $\varphi(x)$ est aussi continue de gauche en chaque point a_{n+1} $(n = 0, 1, \ldots)$. En effet, si x tend *en croissant* vers l'extrémité de droite de l'intervalle (III, 3), x^* tend vers a_1, et d'après (III, 4) $\varphi(x)$ tend vers $n + 2 = \varphi(a_{n+1})$. Donc $\varphi(x)$ *est continue pour tout* $x \geqq a_0$.

Il résulte, en plus, de (III, 4) et (III, 2) que $\varphi(x)$ est dérivable à l'intérieur de tout intervalle (III, 3), c'est-à-dire pour $a_n < x < a_{n+1}$. On a évidemment

$$\varphi'(x) = \frac{1}{a_1 - a_0} \quad \frac{d\psi_n(x)}{dx} ,$$

$$(a_1 - a_0)\,\varphi'(x) = \psi'(\psi_{n-1}(x))\,\psi'(\psi_{n-2}(x)) \ldots \psi'(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (a_n < x < a_{n+1}) \,. \tag{III, 5}$$

La même expression donne encore la *dérivée de droite* de $\varphi(x)$ en a_ν, de sorte que $\varphi'_+(x)$ *est continue dans l'intervalle* (III, 3).

On a en particulier

$$(a_1 - a_0)\,\varphi'_+(a_0) = 1 \,, \quad (a_1 - a_0)\,\varphi'_+(a_1) = \psi'(a_1) \,, \quad \ldots$$

$$(a_1 - a_0)\,\varphi'_+(a_n) = \psi'(a_n)\,\psi'(a_{n-1}) \ldots \psi'(a_1) \quad (n = 1, 2, \ldots) \,. \tag{III, 6}$$

Pour l'extrémité de droite de l'intervalle (III, 3), l'expression (III, 5) tend avec $x \uparrow a_{n+1}$ vers

$$\frac{d\psi_n(a_{n+1})}{dx} = \psi'(a_{n+1})\,\psi'(a_n) \ldots \psi'(a_2) \,.$$

Or, ceci est aussi

$$(a_1 - a_0)\,\varphi'_-(a_{n+1}) \,,$$

où $\varphi'_-(a_{n+1})$ est la *dérivée de gauche* de $\varphi(x)$ en a_{n+1}. En effet, on a

$$(a_1 - a_0)\,\varphi'_-(a_{n+1}) = \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{(a_1 - a_0)(n+2) - [(n+1)(a_1 - a_0) + \psi_n(x) - a_0]}{a_{n+1} - x} =$$

$$= \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{a_1 - \psi_n(x)}{a_{n+1} - x} = \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{\psi_n(a_{n+1}) - \psi_n(x)}{a_{n+1} - x} = \frac{d\psi_n(a_{n+1})}{dx} \,.$$

On a donc en particulier

$$(a_1\, a_0)\,\varphi'_-(a_n) = \psi'(a_n)\,\psi'(a_{n-1}) \ldots \psi'(a_2) \qquad (n > 0)$$

où le second membre a la valeur *un* pour $n = 1$. Donc, en comparant avec (III, 6),

$$\varphi'_+(a_n) = \psi'(a_1)\,\varphi'_-(a_n) \,, \quad \varphi'_-(a_n) = \Psi'(a_0)\,\varphi'_+(a_n) \,. \tag{III, 7}$$

On voit que $\varphi'(x)$ est continue à l'intérieur de chacun des intervalles $\langle a_n, a_{n+1} \rangle$, à condition de prendre aux extrémités les dérivées du côté correspondant. Au point de discontinuité a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on a (III, 7). Il résulte maintenant de l'hypothèse de la continuité de $\Psi'(x)$ que la propriété β) est satisfaite.