IX. Les fonctions conjuguées auxquelles x + 1 est subordonné.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

En second lieu, si $1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}$, x^4 sera situé dans l'intervalle $(x_{\nu+1}, x_{\nu+1}^4)$ de sorte qu'on aura

$$f(x^4) = \frac{f(x_{\nu+1})}{\left(8^{(\nu+1)^2} lg\, x_{\nu+1}\right) x^4},$$

donc

$$\frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)} = \frac{4\, f(x_{\nu+1})}{\left(8^{\nu^2+2\nu+1} lg\, x_{\nu+1}\right) x\, f(x)},$$

et, puisqu'on a en tout cas

$$f(x) \geqq \frac{f(x_\nu)}{\left(8^{\nu^2+\nu} lg\, x_\nu\right) x},$$

il vient

$$\frac{f(x^4)\, 4x^3}{f(x)} \leqq \frac{f(x_{\nu+1})\left(8^{\nu^2+\nu} lg\, x_\nu\right) \cdot 4}{\left(8^{\nu^2+2\nu+1} lg\, x_{\nu+1}\right) f(x_\nu)} = \frac{f(x_{\nu+1})\, lg\, x_\nu}{\left(2 \cdot 8^\nu lg\, x_{\nu+1}\right) f(x_\nu)}.$$

Or, on a évidemment pour $\nu \longrightarrow \infty$

$$lg\, x_{\nu+1} \sim 4\, lg\, x_\nu\ , \qquad f(x_{\nu+1}) < f(x_\nu)\,,$$

donc

$$\frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)} \longrightarrow 0 \qquad (x \longrightarrow \infty,\ \ 1 + x_\nu < x < x_{\nu+1})\,.$$

On a ainsi

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = 0\,,$$

et le critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée $\Psi_2(x) = x^4$ est applicable à la série $\Sigma f(\nu)$.

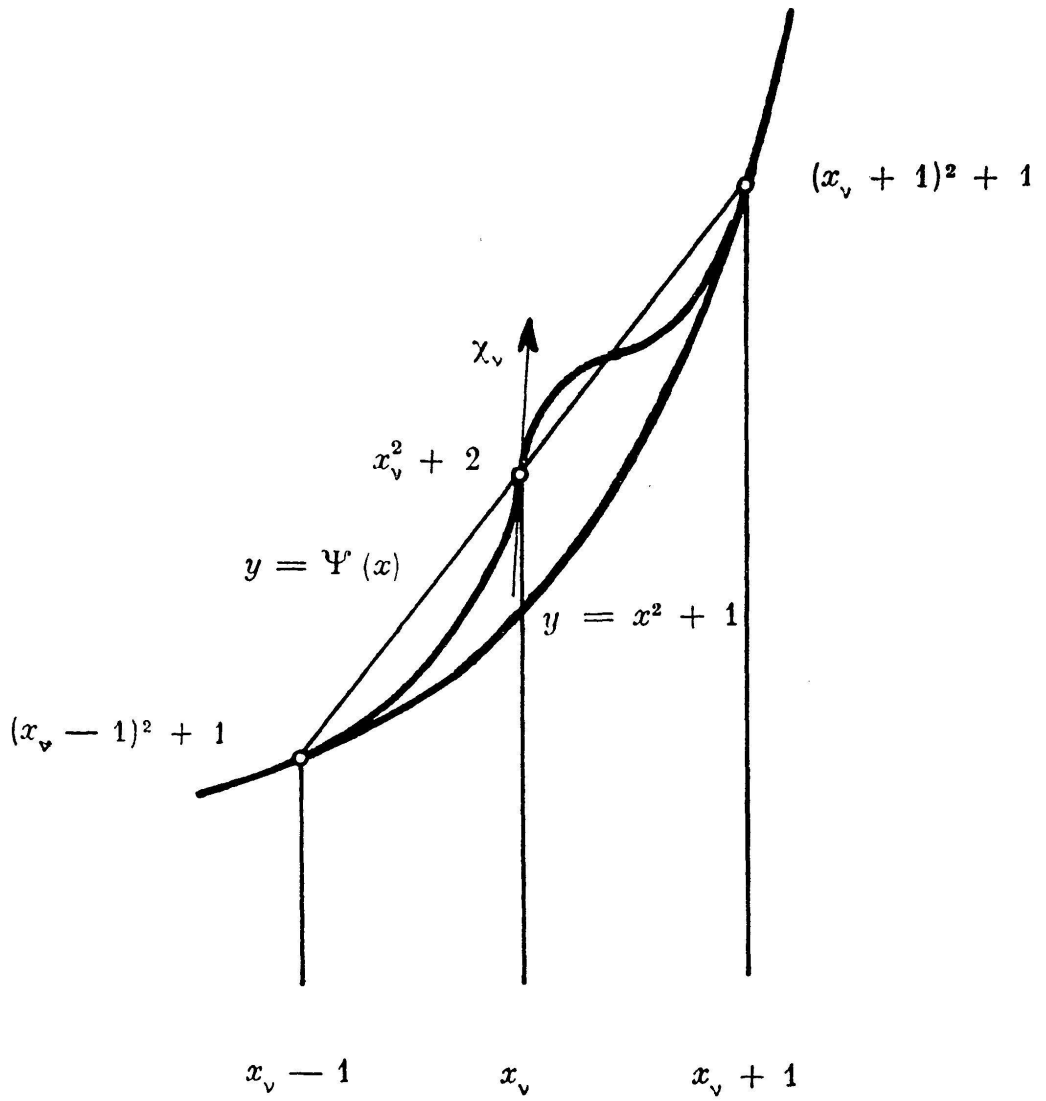
IX. Les fonctions conjuguées auxquelles x + 1 est subordonné.

En second lieu Ermakof donne à l'endroit cité l'énoncé suivant:

« *De deux fonctions conjuguées de première espèce la plus grande est celle qui donne le caractère le plus sensible de convergence ou de divergence.* »

Or cet énoncé est de même inexact. Nous allons construire une fonction conjuguée $\Psi(x)$ qui, pour $x \geqq 3$, est partout $> x^2$, et telle que pour

$$f(x) = \frac{1}{x\,(lg\,x)^2}$$



le critère B de convergence d'Ermakof est applicable avec la fonction conjuguée x^2 et ne l'est pas avec la fonction conjuguée $\Psi(x)$.

A cet effet posons

$$x_\nu = 10\,\nu\,, \quad \chi_\nu = 32\,x_\nu = 320\,\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

et considérons la courbe $y = x^2 + 1$ $(x \geqq 3)$ qui est situé au-dessus de $y = x^2$. Pour obtenir la courbe $y = \Psi(x)$ nous poserons $\Psi(x) = x^2 + 1$ pour $x \geqq 3$ *en dehors* de tout intervalle fermé

$\langle x_\nu - 1, 1 + x_\nu \rangle$. Quant aux intervalles $\langle x_\nu - 1, 1 + x_\nu \rangle$ nous y définirons $\Psi(x)$ comme une fonction continue, constamment croissante et douée d'une dérivée continue, telle qu'on ait $\Psi(x) \geqq x^2 + 1$ $(x \geqq 3)$ et

$$\Psi(x_\nu - 1) = (x_\nu - 1)^2 + 1 , \qquad \Psi(x_\nu + 1) = (x_\nu + 1)^2 + 1 ,$$

$$\Psi'(x_\nu - 1) = 2(x_\nu - 1) , \qquad \Psi'(x_\nu + 1) = 2(x_\nu + 1) ,$$

$$\Psi(x_\nu) = x_\nu^2 + 2 , \qquad \Psi'(x_\nu) = \chi_\nu .$$

On remplace donc l'arc correspondant de la courbe $y = x^2 + 1$ par un arc qui est tangent à $y = x^2 + 1$ aux points $x = x_\nu \pm 1$, qui passe par le point $(x_\nu, 2 + x_\nu^2)$ et y a une tangente à coefficient angulaire χ_ν. On voit immédiatement qu'il est possible de trouver un tel arc en étudiant la figure ci-contre. En effet, pour qu'il soit possible de construire cet arc de $y = \Psi(x)$ situé entre les abscisses $x_\nu - 1$ et $1 + x_\nu$, il suffit que l'arc correspondant de $y = x^2 + 1$ soit convexe d'en bas et que l'on ait

$$\Psi(x_\nu - 1) < \Psi(x_\nu) < \Psi(x_\nu + 1) .$$

On a pour notre fonction $f(x)$:

$$\frac{f(x^2)\, 2x}{f(x)} = \frac{x\,(lg\, x)^2 \cdot 2\, x}{x^2\,(lg\, x^2)^2} = \frac{1}{2} < 1 \qquad (x \geqq 3) .$$

Donc le critère de convergence B d'Ermakof est satisfait pour la fonction conjuguée x^2. D'autre part, on a

$$\frac{f(\Psi(x_\nu))\,\Psi'(x_\nu)}{f(x_\nu)} = \frac{f\left(2 + x_\nu^2\right)\chi_\nu}{f(x_\nu)}$$

$$= \frac{x_\nu\,(lg\, x_\nu)^2\, 32\, x_\nu}{\left(2 + x_\nu^2\right)\left(lg\left(2 + x_\nu^2\right)\right)^2} > \frac{32\, x_\nu^2\,(lg\, x_\nu)^2}{2\, x_\nu^2\,\left(lg\, x_\nu^4\right)^2} = 1 ,$$

et le critère B de convergence d'Ermakof n'est pas satisfait par la fonction conjuguée $\Psi(x)$.

Toutefois, il est possible d'établir quelques énoncés dans cet ordre d'idées. Nous nous bornerons dans cette discussion au *critère* B *de convergence* et supposerons que $f(x)$ est une fonction *non croissante* de x.

Nous dirons alors qu'une fonction conjuguée $\Psi(x)$ est *subordonnée* à une fonction $\Psi_1(x)$ si, pour une fonction $f(x)$ positive et non croissante, l'inégalité

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} < 1$$

entraîne toujours l'inégalité

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi_1(x))\,\Psi_1'(x)}{f(x)} < 1 .$$

La fonction conjuguée la plus simple étant $x+1$, il est naturel de se demander à quelles fonctions conjuguées $\Psi(x)$ elle est subordonnée. Tout d'abord $x+1$ est subordonné à $x+\alpha$ $(\alpha > 1)$. En effet, puisqu'on a par hypothèse:

$$f(x+\alpha) \leqq f(x+1)$$

on a évidemment

$$\frac{f(x+\alpha)}{f(x)} \leqq \frac{f(x+1)}{f(x)} .$$

Plus généralement, si pour la fonction conjuguée $\Psi(x)$ on a à partir d'un x:

$$\Psi(x) - x \geqq 1 , \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \Psi'(x) \leqq 1 ,$$

$x+1$ est subordonné à $\Psi(x)$. En effet, on a d'après les hypothèses que nous avons faites

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \leqq \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(x+1)}{f(x)} .$$

Un autre énoncé relatif à la fonction conjuguée $x+1$ est le suivant:

$x+1$ est subordonné à une fonction conjuguée $\Psi(x)$ si l'on a

$$\Psi(x) - x \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty) , \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{lg\,\Psi'(x)}{\Psi(x) - x} \leqq 0 ,$$

En effet, supposons que l'on ait pour $x \geqq x_0$

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \leqq q = e^{-\varepsilon} < 1 .$$

Alors on a pour tout entier positif n:

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n} .$$

Or, soit $n = [\Psi(x) - x]$. On obtient

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \frac{f(x+n)\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq e^{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) .$$

D'autre part, on a à partir d'un x

$$lg\,\Psi'(x) \leqq \frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x) - x] , \qquad \Psi'(x) \leqq e^{\frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x)-x]} ,$$

donc

$$e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) \leqq e^{-\frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x)-x]} \longrightarrow 0 , \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

X. Les fonctions conjuguées auxquelles x^k est subordonné.

Nous allons maintenant établir une condition suffisante pour que x^k $(k > 1)$ soit subordonné à la fonction conjuguée $\Psi(x)$ pour chaque k:

Si la fonction conjuguée $\Psi(x)$ *satisfait aux deux conditions*

$$\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\,(lg\,\Psi(x))^{1+\delta}} \longrightarrow 0 , \qquad \frac{lg\,x}{lg\,lg\,\Psi(x)} \longrightarrow 0 \qquad (x \longrightarrow \infty) \tag{X, 1}$$

pour chaque $\delta > 0$, *la fonction conjuguée* x^k *est subordonnée à* $\Psi(x)$ *pour chaque* $k > 1$.

Démonstration. — On a à partir d'un x

$$\frac{f(x^k)\,k\,x^{k-1}}{f(x)} \leqq q = e^{-\varepsilon} < 1;$$

il en résulte pour chaque entier positif n

$$\frac{f\left(x^{k^n}\right) k^n\, x^{k^n}}{x\,f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n} . \tag{X, 2}$$

Or, choisissons l'entier n en fonction de x de façon que l'on ait

$$x^{k^{n+1}} > \Psi(x) \geqq x^{k^n} . \tag{X, 3}$$