Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1955)

Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF

Autor: Ostrowski, A.

Kapitel: XI. Quelques observations sur le théorème A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31365

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$n > \frac{lg \frac{lg \Psi(x)}{lg\, x}}{lg\, k} - 1 ,$$

donc

$$e^{-\varepsilon n} \leqq e^{\varepsilon} \left(\frac{lg\, \Psi(x)}{lg\, x} \right)^{-\frac{\varepsilon}{lg\, k}} ,$$

par suite, d'après (X, 8),

$$e^{-\varepsilon n} \leqq e^{\varepsilon} \left(\frac{lg\, x}{lg\, \Psi(x)} \right)^{2\delta} .$$

En introduisant cette borne dans (X, 9) on obtient

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq k\, e^{\varepsilon}\, x^{k}\, \frac{(lg\, x)^{1+2\delta}}{(lg\, \Psi(x))^{\delta}} . \qquad \text{(X, 10)}$$

Or on a, en vertu de (X, 1) à partir d'un x:

$$\delta\, lg\, lg\, \Psi(x) > (k+1)\, lg x , \quad (lg\, \Psi(x))^{\delta} > x^{k+1} .$$

L'expression de droite de (X, 10) est donc à partir d'un x

$$\leqq k\, e^{\varepsilon}\, \frac{(lg\, x)^{1+2\delta}}{x}$$

et tend vers 0 avec $x \longrightarrow \infty$. x^k est donc bien subordonné à $\Psi(x)$.

Nos conditions (X, 1) sont par exemple satisfaites pour

$$\Psi(x) = e^{e^{x}} , \quad \Psi(x) = e^{e^{e^{x}}} , \quad \Psi(x) = e^{e^{(lg\, x)^2}} .$$

XI. Quelques observations sur le théorème A.

Nous établirons enfin quelques propositions supplémentaires relatives au critère A d'Ermakof.

α) *Soient* $\Psi(x)$ *et* $\psi(x)$ *deux fonctions positives, continues et dérivables pour* $0 < x_0 \leqq x < \infty$ *et telles que l'on ait*

$$\Psi(x) \longrightarrow \infty , \quad \psi(x) \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty)$$

et que $\Psi'(x)$ et $\psi'(x)$ *soient positifs et sommables dans tout sous-intervalle fini de* $< x_0, \infty)$. *Soit* $f(x)$ *positif pour* $x \geqq x_0$ *et sommable dans tout sous-intervalle fini de* $< x_0, \infty)$. *Supposons, qu'il existe un* $q\,(0 < q < 1)$ *tel que l'on ait*

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \leqq q\,f(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (x \geqq x_0)\,. \tag{XI, 1}$$

Alors on a ou bien pour tout $x \geqq x_0$: $\Psi(x) > \psi(x)$, *ou bien à partir d'un* x: $\Psi(x) < \psi(x)$, *suivant que l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx \tag{XI, 2}$$

est convergente ou divergente.

Démonstration. — Il résulte de (XI, 1) pour $x_0 \leqq x' \leqq x''$

$$\int_{x'}^{x''} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx \leqq q \int_{x'}^{x''} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx\,,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Psi(x')}^{\Psi(x'')} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x')}^{\psi(x'')} f(x)\,dx\,. \tag{XI, 3}$$

Donc, si (XI, 2) converge:

$$\int_{\Psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx < \int_{\psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx\,;$$

de sorte qu'on a pour chaque $x' \geqq x_0$

$$\Psi(x') > \psi(x')\,.$$

Supposons d'autre part que (XI, 2) soit divergente. Alors nous allons démontrer qu'il est impossible que pour une suite x_ν avec $x_\nu > x_0\,(\nu > 0)$, $x_\nu \longrightarrow \infty$ on ait

$$\Psi(x_\nu) > \psi(x_\nu)\,. \tag{XI, 4}$$

Car on il résulterait de (XI, 4) d'après (XI, 1)

$$\int_{x_0}^{x_\nu} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx \leqq q \int_{x_0}^{x_\nu} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx\,,$$

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x_\nu)} f(x)\,dx\,,$$

donc, d'après (XI, 4):

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \left(\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx + \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx \right)\,,$$

et, puisque $0 < q < 1$,

$$(1-q) \int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,, \quad \int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq \frac{q}{1-q} \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,,$$

et l'intégrale (XI, 2) serait convergente puisque $\Psi(x_\nu)$ tend vers l'infini, C.Q.F.D.

β) *Supposons que dans les hypothèses de la proposition* α) *on ait pour* $x \geqq x_0$

$$x f(x) \leqq c\,, \quad \Psi(x) \geqq \gamma\,\psi(x) \quad (x \geqq x_0) \tag{XI, 5}$$

pour une constante positive c *et une constante positive* $\gamma \leqq 1$. *Alors l'intégrale* (XI, 2) *est convergente et l'on a*

$$\Psi(x) > \psi(x) \quad (x \geqq x_0)\,.$$

Démonstration. — On a pour $x \geqq x_0$ comme dans la démonstration de (XI, 3)

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x)\,dx\,. \tag{XI, 6}$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,,$$

$$\int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{\psi(x_0)} f(x)\,dx\,.$$

Donc en introduisant ces expressions dans (XI, 6) et en résolvant l'inégalité obtenue par rapport à $\int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx$:

$$(1-q)\int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx \leqq \int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx - q\int_{x_0}^{\psi(x_0)} f(x)\,dx\,.$$

Ici on a pour la première intégrale de droite d'après (XI, 5):

$$\int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx \leqq \int_{\gamma\psi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt \leqq c\int_{\gamma\psi(x)}^{\psi(x)} \frac{dt}{t} = c\,lg\,\frac{1}{\gamma}\,.$$

Donc l'intégrale $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ reste bornée pour $x \longrightarrow \infty$ et (XI, 2) est convergente.

γ) *Remplaçons dans les hypothèses de la proposition* α) *l'inégalité* (XI, 1) *par*

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \geqq f(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (x \geqq x_0) \tag{XI, 7}$$

et supposons en plus que l'on ait pour un $x_1 \geqq x_0$ *convenablement choisi*

$$\Psi(x_1) > \psi(x_1)\,.$$

Alors l'intégrale (XI, 2) *est divergente.*

Démonstration. — On a pour $x > x_1 \geqq x_0$ d'après (XI, 7)

$$\int_{x_1}^{x} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx = \int_{\Psi(x_1)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \geqq \int_{x_1}^{x} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx = \int_{\psi(x_1)}^{\psi(x)} f(x)\,dx\,,$$

donc

$$\int_{\psi(x)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \geqq \int_{\psi(x_1)}^{\Psi(x_1)} f(x)\,dx\,.$$

Mais alors l'intégrale de gauche serait pour tout $x > x_1$ supérieure à la constante positive

$$\int_{\psi(x_1)}^{\Psi(x_1)} f(x)\,dx$$

et l'intégrale (XI, 2) ne pourrait converger d'après le critère de Bolzano-Cauchy.