1. Pythagoräische Zahlentripel in Babylonien

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

BEMERKUNGEN ÜBER MATHEMATISCHE KEILSCHRIFTTEXTE

VON

Peter HUBER, Zürich

---

1. PYTHAGORÄISCHE ZAHLENTRIPEL IN BABYLONIEN

Vor ungefähr zehn Jahren haben Neugebauer und Sachs einen altbabylonischen Keilschrifttext (d. h. aus der Zeit um 1700 v. Chr.) entdeckt und veröffentlicht, der sich mit pythagoräischen Zahlentripeln befasst (Text Plimpton 322, *MCT*, p. 38 ff.). Obwohl Neugebauer schon früher die Erwartung ausgesprochen hatte, dass in der babylonischen Mathematik „noch eine Art elementarer Zahlentheorie erkennbar" würde (*MKT*, III, p. 80), bedeutete dieser Fund doch eine nicht geringe Überraschung. Begreiflicherweise ist der Text unterdessen mehrfach bearbeitet worden, und man hat auch verschiedene Hypothesen zur Berechnungsweise des Textes aufgestellt. Leider liessen sich zwei von den drei Rechenfehlern des Textes nicht aus den erwähnten Hypothesen erklären, und auch der Grund, wieso die Zahlen der ersten erhaltenen Kolonne der Tafel überhaupt berechnet wurden, blieb unbekannt. (Vgl. das Literaturverzeichnis am Schluss.)

Deshalb habe ich versucht, durch eine eingehende Diskussion der Rechenfehler des Textes mehr Licht in die möglichen Berechnungsweisen zu bringen.

Wenn wir die Bezeichnungen einführen:

$$d^2 - b^2 = h^2$$

und

$$\beta = \frac{b}{h}, \qquad \delta = \frac{d}{h}$$

tabuliert der erhaltene Teil der Tafel bekanntlich für 15 pythagoräische Zahlentripel

in der ersten Kolonne δ^2 (nicht β^2, vgl. Neugebauer, Exact Sciences, plate 7, wo einzelne Zahlen noch vollständig erhalten sind). Diese Zahlen sind der Grösse nach geordnet und nehmen sehr regelmässig von ungefähr 2 bis ungefähr 4/3 ab. Die Überschrift ist leider unklar: „... der Diagonale, [das a]bgezogen wird, worauf die Breite..."

in der zweiten Kolonne *b* (Überschrift: „Lösungszahl der Breite"),

in der dritten *d* (Überschrift: „Lösungszahl der Diagonale"),

und die vierte enthält eine Zeilennumerierung (Überschrift: „Seine Zeile" (nach Deimel, Šumerisches Lexikon 61,53; Neugebauer übersetzt „its name")).

Zur besseren Übersicht seien hier die beiden wichtigsten Kolonnen gegeben — die fehlerhaften Zahlen sind mit einem * gekennzeichnet:

b	*d*	Nummer
1,59	2,49	1
56,7	3,12,1*	2
1,16,41	1,50,49	3
3,31,49	5,9,1	4
1,5	1,37	5
5,19	8,1	6
38,11	59,1	7
13,19	20,49	8
9,1*	12,49	9
1,22,41	2,16,1	10
45	1,15	11
27,59	48,49	12
7,12,1*	4,49	13
29,31	53,49	14
56*	53*	15

(Das Komma dient in der üblichen Weise zur Abtrennung der einzelnen Sexagesimalstellen, ohne dass damit etwas über den absoluten Stellenwert ausgesagt wird.)

In Zeile 9 liegt wohl nur ein Schreibfehler vor; der richtige Wert ist $b = 8{,}1$.

In Zeile 15 ist wahrscheinlich eine Multiplikation vergessen worden; das beabsichtigte Tripel muss entweder die Werte $b = 28$, $d = 53$, oder $b = 56$, $d = 1{,}46$ (d. h. 2×53) gehabt haben.

In Zeile 13 ist der richtige Wert $b = 2{,}41 = \sqrt{7{,}12{,}1}$. Die naheliegende Erklärung, hier sei das Zwischenresultat einer Kontrollrechnung (Einsetzen des Tripels in die Gleichung $d^2 - b^2 = h^2$) in den Text hineingerutscht, befriedigt nicht. Denn erstens zeugt eine Kontrollrechnung von erhöhter Sorgfalt und ist also nicht zur Erklärung eines Rechenfehlers geeignet, und zweitens sind die Zeilen 2 und 15 sicher nicht kontrolliert worden, sonst hätte man jene Rechenfehler entdeckt. Deshalb scheint mir wahrscheinlicher zu sein, dass man hier vergessen hat, eine Quadratwurzel zu ziehen.

Die grössten Schwierigkeiten bereitet Zeile 2. Der richtige Wert ist hier $d = 1{,}20{,}25$, aber der Zusammenhang mit dem falschen war bis jetzt ungeklärt. Da wir ja nichts Sicheres über die tatsächliche Berechnungsweise wissen, habe ich versucht, Hypothesen über das Rechenverfahren bei der Erklärung des Fehlers erst möglichst spät einzuführen. Dazu musste ich die Fortpflanzung von Rechenfehlern systematisch untersuchen.

a) Positionsfehler. Allen diesen Fehlern ist gemeinsam, dass sie die Gesamtzahlen der Keile und der Winkelhaken (d. h. der Einer und der Zehner) nicht ändern, also auch die Quersumme festlassen. Eine sexagesimal geschriebene Zahl ist aber zu ihrer Quersumme kongruent modulo 59. Bezeichnen wir die richtige Zahl mit a und die falsche mit a', gilt also

$$a' \equiv a \pmod{59}.$$

Nach den elementaren Regeln für das Rechnen mit Kongruenzen bleibt diese Relation auch bei allen im Bereiche der abbrechenden Sexagesimalzahlen ausführbaren Grundrechenoperationen bestehen, ausgenommen beim Dividieren durch Multipla von 59 und beim Radizieren. Die letztere Operation wird aber kaum je mit einer falschen Zahl aufgehen, und der erste Fall ist *a priori* unwahrscheinlich.

b) Eigentliche Rechenfehler. Diese werden im allgemeinen so beschaffen sein, dass sie ursprünglich nur eine einzige Sexagesimalstelle beeinflussen und sich erst im Laufe der Rechnung auf mehrere Stellen ausdehnen. Nimmt man an, die Operationen des Wurzelziehens und Reziprokenbildens würden mit der falschen Zahl nicht durchgeführt (das ist keine sehr grosse Einschränkung, weil sie mit der falschen Zahl meistens nicht aufgehen würden), ist die Differenz zwischen falscher und richtiger Zahl ein Polynom im ursprünglichen Fehler r, das für $r = 0$ verschwindet, also durch r teilbar ist. Für r kommen also nur noch kleine reguläre Zahlen und die irregulären Faktoren der Differenz zwischen falscher und richtiger Zahl in Frage. (Eine Zahl wird regulär genannt, wenn ihr Inverses eine abbrechende Sexagesimalbruchentwicklung besitzt, d. h. wenn sie nur die Primfaktoren 2, 3 und 5 enthält.) Ist das fragliche Polynom linear

$$P(r) = cr$$

kann man unter Umständen zeigen, dass gewisse irreguläre Faktoren nicht in c vorkommen können, weil daraus ein unwahrscheinlich kompliziertes Rechenverfahren folgen würde. Dadurch werden die Möglichkeiten für r weiter eingeengt.

c) Vergessene oder überflüssige Operationen. Davon lassen sich einfachere Fälle, z. B. vergessene Additionen oder Multiplikationen auf den Fall *b)* zurückführen, nur muss man dann grössere Werte von r in Betracht ziehen.

d) Fehler von anderem Typus, z. B. Verwechseln von Zwischenresultaten oder Tabellen, falsche Methoden usw. Derartige Fehler lassen sich höchstens mit Glück aufklären, aber kaum systematisch.

Unter der Annahme, es liege nur *ein* Fehler vor, können wir Typus *a)* in unserem Fall sofort ausschliessen, denn

$$3{,}12{,}1 \equiv 16 \pmod{59} \quad \text{und} \quad 1{,}20{,}25 \equiv 46 \pmod{59}.$$

Typus *b)*

$$3{,}12{,}1 - 1{,}20{,}25 = 1{,}51{,}36 = 2^3 . 3^3 . 31 .$$

Ist das fragliche Polynom in r linear anzusetzen, lässt sich der Fall nach dem oben angedeuteten Verfahren ziemlich rasch erledigen; man kommt auf $r = 31$, und zwar an einer Stelle der Rechnung, die diesen Fehler nicht gerade plausibel macht. Bei quadratischen Polynomen ist man aufs Probieren angewiesen, mit der Zusatzbedingung, dass das Rechenverfahren mathematisch richtig und nicht übermässig kompliziert sein soll. Freilich habe ich nicht alles durchprobiert, aber ich glaube doch, dass der Fehler nicht in dieser Richtung gesucht werden kann. Ebenso kann man einfachere Fälle vom Typus *c)* ausschliessen. Eine Ermessensfrage bleibt natürlich stets, ob man einen Fehler als wahrscheinlich ansehen will oder nicht, wenn sich ein komplizierter Ansatz ergibt.

Es dürfte also entweder ein komplizierter Fehler vom Typus *c)* oder *d)* vorliegen, oder dann haben wir zwei Fehler in Betracht zu ziehen. Weil Positionsfehler sich gerne zu anderen Fehlern gesellen und weil in Zeile 15 eine Multiplikation vergessen zu sein scheint, habe ich versuchsweise den Fehler als vergessene Multiplikation, kombiniert mit einem Positionsfehler, angesetzt. Wenn wir den vergessenen Faktor mit x bezeichnen, führt das auf die Kongruenz

$$x.(3,12,1) \equiv 1,20,25 \pmod{59}$$

mit der Lösung

$$x \equiv 25 \pmod{59}.$$

Tatsächlich gibt schon $x = 25$ recht wahrscheinlich aussehende Erklärungsmöglichkeiten, nämlich

$$25.(3,12,1) = 1,20,0,25$$

oder

$$25.(3,13) = 1,20,25\ .$$

Der zweite Ansatz scheint mir der wahrscheinlichere zu sein (3,12, 1 wäre Schreibfehler für 3,13, d. h. der letzte Keil der 3 wäre zu weit rechts geschrieben). Die Annahme von zwei Fehlern mag etwas unbefriedigend sein, aber nach dem Vorangegangenen glaube ich, dass es die einfachste Erklärungsmöglich-

keit ist. Überdies werden wir nur zeigen müssen, dass der Fehler bestimmten Rechenverfahren nicht widerspricht, wobei es mehr oder weniger gleichgültig ist, wenn es noch andere Entstehungsmöglichkeiten für den Fehler gibt.

Welche Berechnungsweisen kommen für den Text in Frage ? Wenn man sich etwas in die Zahlen der Tafel vertieft, erkennt man, dass das Verfahren dem allgemeinsten äquivalent gewesen sein muss, mit der einzigen Einschränkung, dass h stets eine reguläre Zahl ist[1]. Dies, und die Tatsache, dass in der ersten Kolonne δ^2 tabuliert worden ist, legt nahe, dass die Berechnung nicht direkt, sondern über β und δ erfolgt ist. Eine Bestätigung dafür findet man in der elften Zeile, wo die Werte von β und δ stehen geblieben sind (vgl. van der Waerden, Ontw. Wet. p. 89), ausserdem in den Rechenfehlern von Zeile 2 und 15, die beide andeuten, das Schlussresultat sei durch eine Multiplikation aus einem Zwischenresultat gebildet worden. Wir haben also nicht die heute übliche Form der allgemeinen Formeln anzunehmen

$$h = 2pq\,, \qquad b = p^2 - q^2\,, \qquad d = p^2 + q^2\,, \tag{1}$$

sondern die durch Division durch die erste Gleichung daraus hervorgehenden

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right) = \frac{1}{2}\,(\alpha - \alpha^{-1}) \qquad \delta = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\right) = \frac{1}{2}\,(\alpha + \alpha^{-1}) \tag{2}$$

Neugebauer und Sachs ziehen in (2) die ersten, zweiparametrigen Ausdrücke vor, weil sie sich auf Grund des kanonischen babylonischen Tabellensystems ohne weiteres berechnen lassen; dabei dürfte es allerdings recht schwierig sein, die gleichmässig abnehmende Folge der δ^2 zu erhalten, welche der Text bietet, weil die Werte von p und q erst durch mühsames Ausprobieren gefunden werden müssen. Bruins wählt die zweiten, einparametrigen Ausdrücke; er muss dann allerdings eine vierstellige Reziprokentafel voraussetzen, erhält aber die Ordnung der Tripel als zufälliges Ergebnis der Ordnung der Reziprokentafel.

---

[1] Die Tafel enthält nicht nur sehr komplizierte Zahlen, sondern ist in gewissen Sinn auch vollständig. Das Tripel mit kleinstem d, welches man zwischen diejenigen der Tafel einschalten könnte, käme nach Zeile II mit $b = 3{,}12{,}9$, $d = 5{,}28{,}41$. Das ist grösser als alle d-Werte der Tafel.

(Die Lücken, welche Bruins in dieser Reziprokentafel anzunehmen hat, lassen sich übrigens viel einfacher und „babylonischer" erklären, wenn man annimmt, die vierstellige Tafel sei ohne Rechnung, durch blosses Umschreiben aus einer dreistelligen entstanden; Bruins' Primfaktorzerlegung ist wohl zu modern gedacht.) Aus den β und δ kann man nun ohne besondere Mühe durch Multiplizieren mit $2\,pq$, bzw. durch Abspalten von gemeinsamen Faktoren die Werte von b und d erzeugen.

Beide Verfahren haben aber den Mangel, dass sie nicht gestatten, den Rechenfehler von Zeile 13 zu erklären, der, wie oben erwähnt, ein Wurzelziehen vorauszusetzen scheint. Ich habe deshalb versucht, das Verfahren in dieser Beziehung zu modifizieren:

1) Man berechne $\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{-1})$, α regulär.

2) Man quadriere δ.

3) Man berechne $\beta = \sqrt{\delta^2 - 1}$ nach dem Verfahren von Ist. S 428 (meine Interpretation dieses Textes folgt unmittelbar anschliessend) und vergesse dabei in Zeile 13, die Wurzel aus der von regulären quadratischen Faktoren befreiten Zahl zu ziehen. (Die Wurzel geht natürlich auf, wenn δ die obige Darstellung besitzt, nämlich $\beta = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^{-1})$.)

4) Man entferne gemeinsame Faktoren von β und δ, wobei man benützen wird, dass man die regulären Faktoren von β bereits beim Wurzelziehen abgespalten hat. Dabei können die Fehler in Zeile 2 und 15 ziemlich leicht unterlaufen, denn in Zeile 2 ist der gemeinsame Faktor 5^3, in Zeile 15 ist er $2^5.5$, was ausgezeichnet zu den Fehlern passt — die falschen Werte des Textes sind ja 25 mal, bzw. 2 mal kleiner als die richtigen.

Für diese Hypothese spricht, dass sie ohne weitere Annahme erklärt, wieso δ^2 berechnet wurde.

Dagegen spricht allerdings: Gerade der babylonische Mathematiker, der so gerne mit halben Summen und Differenzen arbeitet, sollte doch die zu δ analoge Darstellung von β als halbe Differenz ohne weiteres bemerkt und das umständliche

Wurzelziehen vermieden haben. Wie ist dann aber der Fehler von Zeile 13 zu erklären ?

Man könnte auch versuchen, die Überschrift der ersten Kolonne auf unser Rechenverfahren zu deuten — was freilich auch für andere Rechenverfahren gelingen dürfte. Immerhin kann man wohl grammatikalisch korrekt übersetzen:

> „*takiltu* (= Hilfszahl ??) der Diagonale.
> Man subtrahiert [1], und dann bestimmt (?) man die Breite."

(Der Unterschied gegenüber der früheren Interpretation liegt darin, dass man die Verbalendung — *u* nicht als Subjunktiv, sondern als 3. masc. plur. auffasst, womit im Akkadischen „man" ausgedrückt werden kann.)

Leider werden wir kaum je erfahren, wie die alten Babylonier auf eine so allgemeine Methode der Erzeugung von pythagoräischen Zahlentripeln gekommen sind. Eine hübsche Möglichkeit findet sich bei van der Waerden, Ontwakende Wetenschap, p. 88 f.

Der ganze Text scheint aber nur eine geringe mathematische Einsicht vorauszusetzen. Vorsichtig formuliert, kann also aus ihm noch keineswegs auf eine höher entwickelte babylonische Zahlentheorie geschlossen werden, wohl aber darauf, dass man sich mit zahlentheoretischen Fragen befasst hat.

2. Zu Ist. S 428

Der Text ist von Neugebauer in Transkription veröffentlicht (*MKT*, I, p. 80). Er erkannte, dass in Zeile Vs. 5/6 eine Quadratwurzel gezogen wird, es gelang ihm aber nicht, diese zufriedenstellend zu ergänzen. Betrachtet man indes die Vorderseite des Textes als ein Ganzes, so lässt sie sich leicht ergänzen, nämlich:

Vs. 2,2,2,2,5,5,4
30,30,30,31,16,16
1,54,24 !,24,27,16
[7],[9],1,31,42,15
[28,36],6,6,49 *mi-nam* íb-si$_8$
[5, 20],53 íb-si$_8$

[1,25],34,8 UR ab-sì