Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1957)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: AUSGEWÄHLTE PROBLEME DER KOMBINATORISCHEN GEOMETRIE DES EUKLIDISCHEN UND SPHÄRISCHEN RAUMES

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33738

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

AUSGEWÄHLTE PROBLEME DER KOMBINATORISCHEN GEOMETRIE DES EUKLIDISCHEN UND SPHÄRISCHEN RAUMES [1]

VON

H. HADWIGER, Bern

Um das Wesen der kombinatorischen Geometrie durch Beispiele zu erläutern, werden in einem einleitenden Teil verschiedene einfache und ältere Ergebnisse von P. VINCENSINI, V.-L. KLEE, L. A. SANTALÓ, N. G. DE BRUIJN, P. ERDÖS, A. HORN u.a. kurz besprochen [2]. Im anschliessenden Hauptteil wird der Fragenkreis der kombinatorischen Geometrie des k-dimensionalen euklidischen und sphärischen Raumes näher umrissen und die Sätze von E. HELLY und A. HORN als besonders charakteristische Aussagen eingehender erklärt und bewiesen. Diese besagen folgendes:

A. *Haben je $k+1$ aus einer Eikörpermenge des k-dimensionalen euklidischen Raumes ausgewählter Eikörper einen nichtleeren Durchschnitt, so gibt es einen Punkt, so dass jeder Eikörper der Menge diesen Punkt enthält* (HELLY).

B. *Haben je $k+1$ aus einer Eikörpermenge des k-dimensionalen sphärischen Raumes ausgewählter Eikörper einen nichtleeren Durchschnitt, so gibt es ein antipodisches Punktepaar, so dass jeder Eikörper der Menge wenigstens einen Punkt des antipodischen Punktepaares enthält* (HORN).

---

[1] Kurz zusammengefasster Bericht über den an der Jahresversammlung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft am 23. September 1956 in Basel gehaltenen Hauptvortrag.

[2] Diese einleitenden Beispiele sind alle dem Aufsatz 'H. HADWIGER und H. DEBRUNNER, Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene. *L'Enseignement mathématique*, I (2e série), fasc. 1-3, 56-89, 1955', entnommen.

Man kann zunächst die sich auf den sphärischen Fall beziehende Aussage herleiten und anschliessend diejenige im euklidischen Fall als Korollar gewinnen. Der umgekehrte Weg lässt sich auch leicht beschreiten, wenn ein Hilfssatz zur Verfügung steht, wonach im k-dimensionalen sphärischen Raum kein gerades stetiges Richtungsfeld existiert. Hierbei heisst ein Richtungsfeld gerade, wenn antipodische Punkte die nämliche Richtung aufweisen; wegen der Existenz paralleler euklidischer Tangentialräume in antipodischen Punkten in einem $(k+1)$-dimensionalen euklidischen Einbettungsraum ist die hier vorausgesetzte Richtungsgleichheit definiert [1]. Innerhalb der sphärischen kombinatorischen Geometrie gibt es Aussagen, deren euklidische Analoga entweder nicht vorhanden oder trivial sind. So gilt beispielsweise:

Genügt eine Eikörpermenge des k-dimensionalen sphärischen Raumes der Bedingung, dass für die sphärischen Umkugelradien R *der enthaltenen Eikörper die Einschränkung* $\sin \mathrm{R} \leqslant 1/(k+1)$ *erfüllt ist, so gibt es* $k+2$ *sphärische Halbräume so, dass jeder Eikörper der Menge in wenigstens einem Halbraum enthalten* ist [2].

Zum Schluss werden einige neue, zum Teil noch ungeklärte Fragen erörtert. So ist nicht bekannt, ob es Erweiterungen der Sätze von HELLY und HORN der folgenden Art gibt:

---

[1] Wie der Referent, der lediglich durch eine Randbemerkung in einer Abhandlung von A. HORN [*Bull. Amer. Math. Soc.*, *55*, 923-929, 1949] auf diesen Hilfssatz aufmerksam wurde, erst nachträglich feststellen konnte, ist die damit ausgedrückte Tatsache von S. KARLIN und L. S. SHAPLEY [*Ann. Math.*, *52*, 148-153, 1950] festgestellt worden. Die gegebene Begründung stützt sich wie auch ein dem Referenten nach dem Vortrag von Herrn A. AEPPLI (Zürich) zugestellter kurzer Beweis auf den Begriff des BROUWERschen Abbildungsgrades. Im Rahmen der kombinatorischen Geometrie ist es jedoch kaum zulässig, topologische Hilfsmittel dieser Art bei den Beweisen ihrer Aussagen (hier der HORNsche Satz), die auf einem wesentlich elementareren Niveau liegen, heranzuziehen. Wenn es nicht gelingt, den hier erörterten Hilfssatz mit einfachen Schlüssen zu gewinnen, was in der Tat leider recht wahrscheinlich ist, so muss wohl seine Anwendung innerhalb der kombinatorischen Geometrie unterbleiben, wenn dieses Gebiet nicht nur in bezug auf die Ergebnisse, sondern auch bezüglich der Arbeitsmethode ein einheitliches Ganzes sein soll.

[2] Diese Aussage wurde zusammen mit einer zu ihr dualen von H. HADWIGER [Kleine Studie zur kombinatorischen Geometrie der Sphäre, *Nagoya Math. J.*, *8*, 45-48, 1955] nachgewiesen. Am Ende dieser Note wurde die Frage aufgeworfen, ob die sich auf die Grösse der Eikörper beziehende, mit Hilfe des Umkugelradius R ausgedrückte Bedingung fallen gelassen werden kann, wenn man zusätzlich verlangt, dass die Eikörper der Menge im sphärischen Raum disjunkt liegen. Mittlerweile hat aber Herr D. GALE (Brown University, Providence, R.I.) darauf aufmerksam gemacht [Brief vom 30.8.1956 an den Verfasser], dass dies nicht zutrifft. Im Falle $k = 2$ zeigt er 5 auf der Kugelfläche disjunkt liegende sphärische Eibereiche auf, von denen nicht 2 in einer Halbkugel enthalten sind, so dass unsere Aussage sicher nicht mehr gelten kann.

Es sei $p \geqslant q \geqslant k + 1$. *Lassen sich unter je* p *aus einer Eikörpermenge des* k*-dimensionalen euklidischen bzw. sphärischen Raumes ausgewählten Eikörpern stets wenigstens* q *Eikörper mit nichtleerem Durchschnitt aufweisen, so gibt es* $\mathrm{N} = \mathrm{N}(p, q; k)$ *Punkte des euklidischen Raumes bzw.* $\mathrm{M} = \mathrm{M}(p, q; k)$ *Punkte des sphärischen Raumes so, dass jeder Eikörper der Menge wenigstens einen der* N *bzw. der* M *Punkte enthält.* (?)

Vorausgesetzt, dass Aussagen dieser Art überhaupt existieren, ist hier angenommen, dass die Zahlen N bzw. M bei vorgegebenen Werten von p und q bei der betreffenden Dimension k bereits die besten, d.h. die kleinstmöglichen sind. Offenbar gilt $\mathrm{N}(k + 1, k + 1; k) = 1$ (Helly) und $\mathrm{M}(k + 1, k + 1; k) = 2$ (Horn). Die gestellte allgemeine Frage ist im eindimensionalen Fall positiv zu beantworten. Hier gilt $\mathrm{N}(p, q; 1) = p - q + 1$ und $\mathrm{M}(p, q; 1) \leqslant p - q + 2$.

Reçu le 9 novembre 1956.

ERRATA

Ostrowski, A.: *Ueber die Verbindbarkeit von Linien und Krümmungselementen durch monoton gekrümmte Kurvenbögen.*

Enseignement mathématique (tome II, fasc. 4, 1956)

Page 278, Z. 6 v. o.: statt 7-10 lies 8-10; ferner statt 3, 4 lies 6, 7.

Page 279, Z. 21 v. o.: statt [3]) lies (siehe Fussnote [3]) auf p. 277). Endlich ist in den *Kolumnentiteln* „Krümmungselementen" durch „Krümmungselemente" zu ersetzen.