1.1. Définitions et exemples.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

séparation de Hausdorff. Ces espaces s'introduisent en effet d'une manière naturelle dans plusieurs questions [2]. Le but de notre article est de montrer comment l'étude des variétés à une dimension (en général non séparées) permet de retrouver plusieurs propriétés des feuilletages du plan.

La première partie est consacrée à l'étude des variétés non séparées (plus particulièrement des variétés à une dimension). Après avoir donné quelques définitions et des exemples (1.1), nous établissons quelques propriétés des variétés à une dimension simplement connexes (1.2) et des structures différentiables qu'on peut y définir (1.3). Ces propriétés seront appliquées dans la seconde partie.

Les structures feuilletées du plan ont été étudiées par Poincaré et de nombreux auteurs. Les définitions fondamentales et les principaux résultats ont été rassemblés en 2.1. Les théorèmes 2, 3 et 4, dus à Kaplan, Kamke et Wazewsky, deviennent particulièrement clairs à notre sens si l'on part de la remarque fondamentale suivante: l'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan est une variété à une dimension (en général non séparée) (2.2). Ces théorèmes sont démontrés en 2.3.

1. Propriétés des variétés a une dimension.

1.1. *Définitions et exemples.*

Définition 1: *Une variété topologique à* n *dimensions* V_n *est un espace topologique dont chaque point admet un voisinage ouvert homéomorphe à l'espace numérique à* n *dimensions* R^n.

On appelle *carte* de R^n dans V_n un homéomorphisme h de R^n sur un ouvert U de V_n; l'ouvert U est le *but* de la carte h. Le changement de cartes associé à deux cartes h_i et h_j de R^n dans V_n de buts respectifs U_i et U_j est l'homéomorphisme $h_j^{-1} h_i$ [3] de l'ouvert $h_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ de R^n sur l'ouvert $h_j^{-1}(U_i \cap U_j)$. D'après la définition précédente, il existe toujours un ensemble de cartes

[2] Par exemple, un faisceau défini sur une variété séparée est muni d'une structure de variété en général non séparée.

[3] Si f est une application d'une partie A d'un ensemble E dans un ensemble E′ et f' une application d'une partie A′ de E′ dans un ensemble E″, on désignera par $f'f$ l'application $x \to f'[f(x)]$ de la partie de E formée des points x tels que $f(x) \in A'$.

dont les buts recouvrent V_n; un tel ensemble sera appelé un *atlas* de R^n sur V_n [4].

Les variétés topologiques séparées sont souvent munies de structures supplémentaires: orientation, structure différentiable, structure complexe... Ces notions (ainsi que celles, par exemple, de vecteur tangent ou de tenseur) sont définies sans faire appel à l'axiome de séparation; elles se transposent donc immédiatement aux variétés non séparées.

Un procédé de construction général.

DÉFINITION 2: *On dit qu'une application continue* p *d'un espace topologique* E *dans un espace topologique* E′ *étale* E *dans* E′, *si tout point* x *de* E *admet un voisinage ouvert* U *tel que la restriction de* p *à* U *soit un homéomorphisme sur un ouvert de* E′.

PROPOSITION 1: *Soit* V_n *une variété à* n *dimensions et soit* ρ *une relation d'équivalence ouverte dans* V_n *telle que la restriction de* ρ *à un voisinage suffisamment petit de tout point* x *de* V_n *se réduise à l'identité. L'espace topologique quotient* $V'_n = V_n/\rho$ *de* V_n *par la relation d'équivalence* ρ *est une variété à* n *dimensions et l'application canonique* p *de* V_n *sur* V_n/ρ *étale* V_n *sur* V'_n.

En effet, si U est un voisinage ouvert de x tel que la restriction de ρ à U soit l'identité, la restriction de p à U est un homéomorphisme de U sur un ouvert U′ de V'_n; chaque point de V_n admet un voisinage homéomorphe à R^n, il en sera donc de même pour chaque point de V'_n.

Remarquons que si V_n est une variété séparée, en général il n'en sera pas de même pour V'_n, comme le montreront les exemples qui suivent.

Le procédé de construction des variétés donné par la proposition 1 est général dans le sens suivant: Etant donnée une variété à n dimensions V_n, il existe une famille de cartes h_i de R^n dans V_n dont les buts recouvrent V_n (i parcourant un ensemble d'indices I); la variété V_n est donc isomorphe au quotient de l'espace somme $I \times R^n$ par la relation d'équivalence associée à l'application $(i, x) \to h_i(x)$ de $I \times R^n$ sur V_n.

---

[4] Nous utilisons ici la terminologie et les définitions de C. Ehresmann.

DÉFINITION 3: *Un point* x *d'une variété* V_n *est appelé un point de branchement s'il existe un point* z *de* V_n ($z \neq x$) *qui n'est pas séparé de* x, c'est-à-dire que tout voisinage de x rencontre tout voisinage de z.

On remarquera que la relation « x n'est pas séparé de z » est symétrique et réflexive, mais qu'elle n'est pas transitive en général (cf. exemple 3 ci-dessous).

Exemples.

La proposition 1 permet la construction d'une multitude d'exemples de variétés. Nous limitant maintenant aux variétés à une dimension et satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité, nous allons étudier quelques exemples importants.

EXEMPLE 1. Soient R_1 et R_2 deux exemplaires de la droite numérique réelle R et soit Σ la somme topologique de R_1 et R_2. Considérons un ouvert Ω de R; la relation d'équivalence ρ dans Σ qui identifie les points de R_1 et R_2 de même abscisse $t \in \Omega$ et qui se réduit à l'identité pour les autres points satisfait à la condition de la proposition 1. En passant au quotient, on obtient une variété à une dimension V. Les points de branchement sont ceux dont l'abscisse est un point frontière de Ω [5]. Il est utile d'indiquer quelques cas particuliers:

a) *le branchement simple:* ici Ω est l'ensemble $t < 0$. Les points de branchement sont ceux d'abscisse 0;

b) *le lasso:* Ω est l'ensemble $t > 0$ et $t < -1$. Les points de branchement sont les points d'abscisse 0 et -1.;

c) *le lasso étranglé:* Ω est l'ensemble $t \neq 0$. Les points de branchement ont l'abscisse 0;

d) Ω est le complémentaire de l'ensemble parfait de Cantor. Ici l'ensemble des points de branchement a la puissance du continu.

EXEMPLE 2. *La boucle:* Soit ρ la relation d'équivalence dans la droite numérique R qui identifie les points d'abscisse t et $-t$ pour $|t| < 1$ et qui se réduit à l'identité pour les autres

[5] L'abscisse du point x de Σ/ρ est l'abscisse des points de Σ qui sont projetés sur x par l'application canonique de Σ sur Σ/ρ.

points. L'espace quotient est la boucle et les points de branchement sont les points 1 et — 1.

EXEMPLE 3. *L'étoile:* Soit Σ la somme topologique de n exemplaires $R_1, R_2, \ldots R_n$ de la droite numérique. Soit ρ la relation d'équivalence dans Σ qui identifie chaque point d'abscisse $t > 0$ de R_i avec le point d'abscisse $-t$ de R_{i+1} ($1 \leqslant i \leqslant n$; on posera $R_{n+1} = R_1$). L'espace quotient est une variété à une dimension qui peut être appelée une étoile à n branches. Les points de branchement sont ici les points d'abscisse 0; deux tels points appartenant à R_i et R_j sont séparés si et seulement si $i - j \neq 1$. On pourrait considérer également une étoile avec une infinité de branches.

EXEMPLE 4. *La plume:* L'exemple 1 *a)* montre comment il est possible de « greffer » au point $t = 0$ d'une droite R un branchement simple; on peut évidemment greffer un tel branchement en un point quelconque de R. Si en tous les points de coordonnées rationnelles de R, on greffe simultanément un branchement simple — il est inutile de décrire ce procédé en détail — on obtient une variété à une dimension qui mérite le nom de plume; la droite R est la *tige* sur laquelle sont greffées les *barbes*. Ici les points de branchement forment un ensemble partout dense dans R.

En greffant une barbe en chaque point de R, on obtiendrait une variété à une dimension qui n'est pas à base dénombrable.

EXEMPLE 5. *La plume composée:* Si dans une plume, on remplace chaque barbe par une nouvelle plume, on définit ainsi une variété à une dimension, que nous appellerons *plume double*. Dans une plume double on peut remplacer chaque barbe par une plume simple, obtenant ainsi une plume *triple*; en réitérant ce processus n fois (n entier) on obtient la plume *n-uple*. Rien n'empêche d'effectuer une suite dénombrable de ces opérations pour obtenir la variété à une dimension qui mérite le nom de plume *composée* (ou plume complète). La plume composée possède la propriété remarquable suivante: l'ensemble des points de branchement, qui est dénombrable, est partout dense dans l'espace envisagé.

Ces divers exemples montrent la grande diversité des variétés à une dimension, connexes et à base dénombrable. Une classification topologique de ces espaces paraît déjà assez compliquée.

Donnons encore un exemple qui donnera une faible idée de la complexité des variétés non séparées de dimension > 1. Soient E_1 et E_2 deux exemplaires de l'espace numérique R^2 à deux dimensions rapporté à un système de coordonnées polaires (r, ω). Soit ρ la relation d'équivalence dans l'espace somme Σ de E_1 et E_2 qui identifie tout point de E_1 de coordonnées (r, ω), $r < 1$, avec le point de E_2 de coordonnées $(r, \omega/1 - r)$ et qui se réduit à l'identité pour les autres points. L'espace quotient Σ/ρ est une variété à deux dimensions; l'image dans Σ/ρ de tout point de E_1 de coordonnées $(1, \omega_0)$ n'est séparée d'aucun point de l'image dans Σ/ρ du cercle $r = 1$ de E_2.

1.2. *Variétés à une dimension simplement connexes.*

Rappelons les définitions suivantes:

DÉFINITION 1: *Le couple* $(\tilde{V}, p)$ *formé d'un espace topologique* $\tilde{V}$ *et d'une application continue* p *de* $\tilde{V}$ *sur un espace topologique* V *est appelé un revêtement de* V, *si tout point de* V *possède un voisinage ouvert* U *tel que* $p^{-1}(U)$ *admette une partition en sous-ensembles ouverts* U_i *tels que la restriction de* p *à chacun d'eux soit un homéomorphisme sur* U.

Un espace topologique V sera dit *simplement connexe*, s'il est connexe et si pour tout revêtement connexe $(\tilde{V}, p)$ de V, la projection p est un homéomorphisme de $\tilde{V}$ sur V.

DÉFINITION 2: *Une variété à* n *dimensions* V_n *est dite orientable, s'il existe un atlas* A *de* R^n *sur* V_n *tel que tout changement de cartes associé à deux cartes de* A *soit un homéomorphisme direct (c'est-à-dire qui conserve l'orientation) d'un ouvert de* R^n *sur un ouvert de* R^n.

Les variétés construites dans les exemples 2 et 3 (pour n impair) ne sont pas orientables.

Si une variété V à une dimension peut être étalée dans la droite numérique R, alors V est nécessairement orientable. Par