2. Les structures feuilletées du plan.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

l'intervalle $[-1, +1]$ défini par $t_0' = \lim_{t \to t_0} h_k^{-1} h_{n+1}(t)$ et soit $x' = \tilde{h}_k(t_0')$; le point $x = \tilde{h}_{n+1}(t_0)$ n'est pas séparé de x'. Il existe une fonction r-différentiable g dans V qui coïncide avec $\hat{f}_k \tilde{h}_k^{-1}$ sur un voisinage de x'; comme g est de rang 1 en x', elle l'est également en x (lemme 1). La fonction qui est égale à gh_{n+1} sur l'intervalle $]-\infty, t_0]$ et à $f_n h_{n+1}$ sur $]t_0\, t_1[$ est r-différentiable sur $]-\infty, t_1[$ car les deux fonctions $g\tilde{h}_{n+1}$ et $f_n h_{n+1}$ coïncident dans un intervalle $]t_0, t_2'[$. En répétant la même construction pour t_1, on obtient une fonction définie sur R de rang 1 sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ et dont la restriction à $]t_0, t_1[$ coïncide avec $f_n h_{n+1}$; d'après le lemme 2, il existe une fonction r-différentiable $\hat{f}_{n+1}$ qui prolonge $f_n h_{n+1}$ et qui est partout de rang 1. La fonction f_{n+1} cherchée est égale à f_n sur Ω_n et à $\hat{f}_{n+1} h_{n+1}^{-1}$ sur 0_n.

Corollaire: Toutes les structures différentiables sur la droite numérique R sont équivalentes.

Soit R la droite numérique munie de sa structure différentiable ordinaire et R′ la droite numérique munie d'une structure différentiable de classe C^r. D'après la proposition, il existe une application r-différentiable partout de rang 1 de R′ sur R (en faisant au besoin une homothétie convenable). Comme cette application est biunivoque, c'est un isomorphisme de classe C^r de R′ sur R (muni de sa structure différentiable ordinaire de classe C^r).

2. Les structures feuilletées du plan.

2.1. *Rappel de définitions et de propriétés classiques.*

Définition 1: *Une structure feuilletée* (F) *sur une variété à deux dimensions* V_2 *est définie par un atlas* A *de* R^2 *sur* V_2 *tel que si* h_i *et* h_j *sont deux cartes quelconques de* A, *le changement de cartes* $h_{ji} = h_j^{-1} h_i$ *est un homéomorphisme d'un ouvert* U_{ji} *de* R^2 *sur un ouvert de* R^2 *qui, au voisinage de tout point de* U_{ji} *s'exprime par des équations de la forme:*

$$x' = g_{ji}(x, y) \qquad y' = k_{ji}(y) \; . \tag{1}$$

Si les changements de cartes h_{ji} *sont* r-*différentiables (respectivement analytiques), on dira que la structure feuilletée* (F) *est différentiable de classe* C^r *(respectivement analytique)* [7].

Disons qu'une carte f de R^2 dans V_2 est compatible avec A, si pour toute carte $h \in A$, le changement de carte $f^{-1} h$ est aussi de la forme (1) (et de plus est r-différentiable ou analytique dans le cas où (F) est une structure différentiable de classe C^r ou analytique). L'ensemble de toutes les cartes compatibles avec A forme l'atlas maximal engendré par A et définissant sur V_2 la structure feuilletée (F). Nous supposerons dans ce qui suit que A est déjà un atlas maximal.

Soit U un ouvert de V_2. L'ensemble des cartes de A dont le but est dans U forme un atlas de R_2 sur U qui définit la structure feuilletée (F_U) induite par (F) sur U.

Si (F) et (F′) sont des structures feuilletées sur V_2 et V_2' respectivement, définies par les atlas maximaux A et A′, un isomorphisme de (F) sur (F′) est un homéomorphisme ψ de V_2 sur V_2' tel que $A' = \psi A$ (c'est-à-dire que toute carte de A′ est de la forme ψh, où $h \in A$).

Dans le but 0_i de chaque carte $h_i \in A$ est définie une relation d'équivalence ρ_i dont les classes sont les images par h_i des droites $y = \text{Cte}$. Des relations (1) il résulte que pour tout point $x \in 0_i \cap 0_j$, les relations d'équivalence induites par ρ_i et ρ_j dans un voisinage suffisamment petit de x coïncident. Soit ρ la relation d'équivalence engendrée par les ρ_i.

DÉFINITION 2: *Les classes de* ρ *dans* V_2 *sont appelées les feuilles de la structure feuilletée* (F).

L'espace des feuilles, c'est-à-dire l'espace quotient de V_2 par la relation d'équivalence ρ (muni de la topologie quotient de celle de V_2), jouera un rôle essentiel dans la suite.

On remarquera que la relation d'équivalence ρ est ouverte puisqu'elle est engendrée par les relations ρ_i qui sont ouvertes.

Rappelons qu'à tout champ de vecteurs E défini sur une variété V_2 séparée vérifiant les deux conditions suivantes: (i) E est différentiable de classe C^r (ou analytique), (ii) $E(z) \neq 0$

---

[7] Pour une définition générale des variétés feuilletées, voir [6].

en tout point z de V_2, est associée une structure feuilletée différentiable de classe C^r (ou analytique). Les feuilles sont alors les trajectoires du champ de vecteurs E. Réciproquement à toute structure feuilletée différentiable (F) de la classe C^r dans R_2, on peut faire correspondre un champ de vecteurs E sur V_2 dont les trajectoires sont les feuilles de (F).

Exemple: Les courbes qui sont solutions de l'équation différentielle (en coordonnées polaires r et ω): $dr/d\omega = r(1 - r^2)$ sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique du plan privé de l'origine. Le cercle $r = 1$ est une feuille autour de laquelle les autres feuilles s'enroulent asymptotiquement.

L'espace quotient de $R^2 - 0$ par la relation d'équivalence ρ associée à la structure feuilletée admet dans ce cas une partition en un sous-espace ouvert homéomorphe à deux cercles et un point admettant comme seul voisinage l'espace tout entier.

DÉFINITION 3: *Le couple* $(0_i, h_i)$ *formé d'une carte* $h_i \in A$ *et de son but* 0_i *s'appelle un ouvert distingué de la structure feuilletée* (F).

Enonçons les principaux résultats relatifs aux structures feuilletées du plan. Le théorème 1 qui suit est classique; sa démonstration repose sur le théorème de Jordan (dans une version particulièrement facile à établir); elle utilise donc essentiellement le fait que le plan R^2 est simplement connexe (ou plus précisément que son premier nombre de Betti modulo 2 est nul).

THÉORÈME 1 (Poincaré [5], Bendixon [1]): Soit $(0_i, h_i)$ un ouvert distingué d'une structure feuilletée du plan; l'image par h_i^{-1} de l'intersection de 0_i avec une feuille quelconque se réduit à l'ensemble vide ou à une droite $y = \text{Cte}$.

THÉORÈME 2 (Kaplan [3]): A toute structure feuilletée du plan R^2 on peut associer une fonction numérique ψ définie dans R^2 qui vérifie les propriétés suivantes:

(i) ψ est continue et n'admet pas de maximum ou de minimum (au sens large);

(ii) ψ est constante sur les feuilles de la structure feuilletée.

THÉORÈME 3 (Kamke [2]): Soit (F) une structure feuilletée de classe C^r du plan R^2. Soit Ω un ouvert borné du plan. Il existe une fonction numérique ψ définie dans Ω et qui vérifie les propriétés suivantes:

(i) ψ est r-différentiable et le gradient de ψ est différent de 0 en tout point de Ω;

(ii) ψ est constante sur les feuilles de la structure feuilletée induite par (F) sur Ω.

THÉORÈME 4 (Wazewsky [7]): On peut munir le plan R^2 d'une structure feuilletée de classe C^∞ telle que toute fonction r-différentiable sur R^2 et qui est constante sur les feuilles de la structure feuilletée se réduise à une constante.

Nous ne reproduirons pas la démonstration du théorème 1, mais nous montrerons dans 2.2 et 2.3 que les théorèmes 2, 3 et 4 sont des conséquences du théorème 1 et des propriétés des variétés à une dimension établies dans la première partie.

Exemples de structures feuilletées du plan:

1. Les droites $y = \text{Cte}$ sont évidemment les feuilles d'une structure feuilletée du plan;
2. Soit C une courbe de Jordan dans le plan R^2. La structure feuilletée précédente induit sur l'ouvert limité par C et qui est homéomorphe à R^2 une structure feuilletée analytique;
3. Le complémentaire U dans R^2 de l'ensemble des points de coordonnées $x = 0$, $y \geqslant 0$ est homéomorphe à R^2. Les composantes connexes des lignes de niveau de la fonction $\psi = xy$ sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique de U.

2.2. *L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan.*

La proposition suivante est une conséquence essentielle du théorème 1 de 2.1.

PROPOSITION 1: *Soit* (F) *une structure feuilletée du plan* R^2. *L'espace quotient* V *de* R^2 *par la relation d'équivalence* ρ *associée*

au feuilletage (cf. définition 2 de 2.1) est une variété à une dimension à base dénombrable et simplement connexe. Si (F) *est une structure feuilletée différentiable de classe* C^r *(ou analytique), l'espace des feuilles* V *est muni canoniquement d'une structure de variété à une dimension différentielle de classe* C^r *(ou analytique).*

Comme R^2 est connexe et à base dénombrable, V est également connexe et à base dénombrable. Pour montrer que V est une variété à une dimension, il suffit de vérifier que tout point z de V admet un voisinage ouvert homéomorphe à la droite numétique. Soit π la projection canonique de R^2 sur V; la feuille $\pi^{-1}(z)$ rencontre au moins un ouvert distingué 0_i. La relation d'équivalence induite par ρ dans 0^i est, d'après le théorème 1, la relation ρ_i. Donc $\pi(0_i)$ qui est un voisinage ouvert de z, puisque ρ est une relation d'équivalence ouverte, est homéomorphe à $0^i/\rho_i$, c'est-à-dire à la droite numérique.

En vertu du théorème de Jordan, le complémentaire de toute feuille (qui est un sous-ensemble fermé de R^2) a deux composantes connexes; le complémentaire de tout point de V a donc également deux composantes connexes. Cette propriété est équivalente au fait que V est simplement connexe (cf. 1.2, lemme).

Soit A un atlas définissant sur R^2 la structure feuilletée différentiable considérée et soit $\overline{h}_i$ la restriction de la carte $h_i \in A$ à la droite $x = 0$. L'ensemble des cartes $\pi\overline{h}_i$ de R dans V est un atlas qui définit sur V une structure différentiable.

Le lecteur pourra construire à titre d'exercice l'espace des feuilles des structures feuilletées du plan définies dans les exemples ci-dessus.

2.3. *Application des résultats de 1. aux structures feuilletées du plan.*

Démonstration du théorème 2.

Le théorème 2 de 2.1 (Kaplan) est une conséquence immédiate de la proposition 1 de 2.2 et de la proposition 1 de 1.2. Soit f une application qui étale l'espace quotient R^2/ρ dans R; l'application $\varphi = f\pi$ est une fonction numérique sur R^2 qui satisfait aux conditions du théorème 2.

Démonstration du théorème 3.

Si le théorème est vrai pour les ouverts bornés et simplement connexes de R^2, il le sera également pour tout ouvert Ω borné; il suffit de considérer l'ouvert C limité par un cercle qui contient Ω; si φ est une fonction dans C qui satisfait aux conditions du théorème, il en sera évidemment de même de sa restriction à Ω.

Ainsi le théorème de Kamke est une conséquence de la proposition 1 de 1.3 et de la proposition suivante:

PROPOSITION: L'espace des feuilles $V' = \Omega/\rho'$ de la structure feuilletée (F') induite par (F) sur Ω est munie d'une structure de variété différentiable régulière de classe C^r.

Soient π et π' respectivement les projections canoniques de R^2 sur $R^2/\rho = V$ et $\Omega/\rho' = V'$. L'injection canonique $\Omega \to R^2$ définit par passage aux quotients une application continue ψ de V' dans V. Comme tout ouvert distingué de Ω est un ouvert distingué de R^2, l'application ψ étale V' dans V; elle est r-différentiable et partout de rang 1.

Soit x' un point de V' et soit x le point $\psi(x')$. Comme Ω est relativement compact, l'intersection de la feuille $F = \pi^{-1}(x)$ avec l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω est compacte. On peut alors trouver un ouvert distingué W dans R^2 suffisamment étroit et allongé pour contenir $F \cap \overline{\Omega}$ et tel que $W \cap \Omega$ soit saturé par des feuilles de Ω. Il est appliqué par π sur un ouvert U homéomorphe à un intervalle et contenant x. Soit f' une fonction r-différentiable définie sur un voisinage U' homéomorphe à un intervalle de x' dans V' suffisamment petit pour que $\psi(U') \subset U$. L'application f obtenue en composant l'inverse de la restriction de ψ à U' avec l'application f' est une fonction r-différentiable définie sur un voisinage de x. Comme U est homéomorphe à un intervalle, il est possible de construire une fonction r-différentiable g sur U qui coïncide avec f sur un voisinage de x et qui s'annule en dehors d'un compact K contenu dans U. Comme $\pi^{-1}(K) \cap W \cap \Omega$ est un fermé dans Ω et qu'il est saturé par des feuilles de Ω, la fonction égale à $g\pi$ sur $W \cap \Omega$ et à zéro aux autres points de Ω est r-différentiable et définit par passage

aux quotients une fonction r-différentiable g' sur V' qui coïncide avec f' au voisinage de x'.

Démonstration du théorème 4.

Il est en général nécessaire de supposer que Ω est borné pour que le théorème de Kamke soit vrai, comme le montre l'exemple suivant.

Soient 0_1 et 0_2 deux exemplaires du plan R^2; dans l'espace somme $0_1 + 0_2$ considérons la relation d'équivalence qui identifie les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) tels que $x_2 = x_1 + 1/y_1$, $y_2 = y_1^3$ pour tout $y_1 < 0$ et qui se réduit à l'identité pour les points tels que $y_1 \geqslant 0$ ou $y_2 \geqslant 0$. L'espace quotient E est homéomorphe au plan R^2; les deux cartes 0_1 et 0_2 forment un atlas qui définit sur E une structure feuilletée analytique dont l'espace des feuilles est le branchement simple muni de la deuxième structure différentiable définie dans 1.3, propriété 1.

Cet exemple permet de bien comprendre la construction de l'exemple de Wazewsky. En particulier, il est facile d'imaginer une structure feuilletée de classe C^∞ dont l'espace des feuilles soit une plume composée V (cf. 1.1, ex. 5) munie d'une structure différentiable de classe C^∞ telle que toute fonction différentiable sur V se réduise à une constante.

Classification des structures feuilletées du plan.

Le problème de la classification des structures feuilletées du plan a été résolu complètement par Kaplan [3]. Nous allons indiquer brièvement et sans démonstration comment nos méthodes permettent également de résoudre ce problème.

La seule considération de l'espace quotient V associé au feuilletage ne suffit pas à le caractériser. Pour cela, il faut introduire une relation d'ordre parmi les points de branchement. Soit V une variété à une dimension simplement connexe et orientée, et soit A un atlas de R sur V définissant une orientation de V. Soient x_1 et x_2 deux points de V qui ne sont pas séparés. Nous dirons que x_1 et x_2 ne sont pas séparés à droite (respectivement à gauche) et nous écrirons $x_1 \sim x_2$ mod. λ^+ (respectivement λ^-) si, étant données deux cartes h_1 et h_2 de A telles