Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1957)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FORMULES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE

Autor: Kervaire, Michel A.

Kapitel: 6. Remarques et exemples.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33741

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Pour le bord d'un volume, on procède de façon semblable: le bord sera linéaire, i.e. $bV = n_1\, bV_1 + n_2\, bV_2$ (au sens de l'addition des surfaces) si $V = n_1 V_1 + n_2 V_2$. Il suffit donc de dire ce qu'est le bord d'un morceau de volume. Soit $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ un morceau V, son bord bV est la surface définie comme suit: Soient S_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ les morceaux de surfaces définis par $\mathbf{r}_i(u, v)$ comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(u, v) &= \mathbf{r}(1, u, v)\ , & \mathbf{r}_2(u, v) &= \mathbf{r}(0, u, v) \\ \mathbf{r}_3(u, v) &= \mathbf{r}(u, 1, v)\ , & \mathbf{r}_4(u, v) &= \mathbf{r}(u, 0, v) \\ \mathbf{r}_5(u, v) &= \mathbf{r}(u, v, 1)\ , & \mathbf{r}_6(u, v) &= \mathbf{r}(u, v, 0)\ . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Le bord bV est la surface, combinaison linéaire des S_i à coefficients entiers, donnée par

$$bV = S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 - S_6\ . \tag{5.4}$$

Rappelons que dans ces expressions pour le bord on devra « négliger » les morceaux dégénérés s'il s'en présente.

6. Remarques et exemples.

Il y a deux différences essentiellement entre courbes, surfaces et volumes introduits au § 3 et les notions habituelles:

1° un morceau est muni d'une *paramétrisation* inhérente à sa définition. La figure géométrique « cercle » ne devient une courbe (ou éventuellement un morceau de courbe) qu'après que l'on a fait choix d'une paramétrisation. Ceci est sans doute contraire à l'idée géométrique, mais c'est adapté à l'intégration;

2° courbes, surfaces et volumes trouvent certes leur origine dans les notions géométriques et analytiques de morceaux de courbe, surface, volume; cependant ce sont essentiellement des objets algébriques avec lesquels on calcule formellement comme avec des formes linéaires d'indéterminées à coefficients entiers.

On peut naturellement paramétriser un *cercle* d'une infinité de manières. On en fait, par exemple, un morceau en prenant

$$\mathbf{r}(t) = \left\{ R \cos(2\pi t)\ ,\ R \sin(2\pi t)\ ,\ 0 \right\},\quad R = \text{rayon},\ 0 \leqq t \leqq 1. \tag{6.1}$$

L'application

$$\mathbf{r}(u, v) = \{ \mathrm{R}u \,.\, \cos(2\pi v) \,,\ \mathrm{R}u \,.\, \sin(2\pi v) \,,\ 0 \} \,, \quad 0 \leqq u, v \leqq 1, \tag{6.2}$$

définit un *disque* D. Cherchons bD: on a (cf. (5.1))

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C}_1 \text{ est donné par } \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(1, t) = \{ \mathrm{R}\cos(2\pi t) \,,\ \mathrm{R}\sin(2\pi t) \,,\ 0 \} \\
&\mathrm{C}_2 \text{ est donné par } \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(0, t) = \{ 0 \,,\ 0 \,,\ 0 \} \\
&\mathrm{C}_3 \text{ est donné par } r_3(t) = \mathbf{r}(t, 1) = \{ t\mathrm{R} \,,\ 0 \,,\ 0 \} \\
&\mathrm{C}_4 \text{ est donné par } \mathbf{r}_4(t) = \mathbf{r}(t, 0) = \{ t\mathrm{R} \,,\ 0 \,,\ 0 \}
\end{aligned}$$

par suite C_2 est dégénérée, $\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_4$, et l'on a

$$b\mathrm{D} = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_4 = \mathrm{C}_1 \,.$$

La formule

$$\mathbf{r}(u, v) \equiv \{ \mathrm{R}\cos(2\pi v) \,.\, \sin(\pi u) \,,\ \mathrm{R}\sin(2\pi v) \,.\, \sin(\pi u) \,,\ \mathrm{R}\cos(\pi u) \} \tag{6.3}$$

permet de regarder la *sphère* comme morceau de surface au sens du § 3. Cherchons le bord du morceau S défini par la formule ci-dessus. Les morceaux $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_4$ définis par (5.1) ont les propriétés $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2 = 0$ (dégénérés), $\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_4$. Donc $b\mathrm{S} = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_4 = -\mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_4 = 0$.

La *boule* de rayon R est donnée comme morceau de volume par

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3) = \{ &\mathrm{R}u_1 \cos(2\pi u_3) \sin(\pi u_2) \,,\ \mathrm{R}u_1 \sin(2\pi u_3) \sin(\pi u_2) \,, \\
&\mathrm{R}u \cos(\pi u_2) \}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

où $0 \leqq u_1, u_2, u_3 \leqq 1$.

On vérifie aisément en utilisant (5.3) que le bord de la boule est la sphère représentée par (6.3).

On peut également représenter le *tore* comme morceau de surface, la formule est la suivante:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(u, v) = \{ &\mathrm{R}\cos(2\pi u) - r\sin(2\pi v)\cos(2\pi u) \,, \\
&\mathrm{R}\sin(2\pi u) - r\sin(2\pi v)\sin(2\pi u) \,,\ r\cos(2\pi v) \} \,.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

On vérifie aisément que le bord de cette surface est zéro.

Etudions maintenant le cas du *ruban de Möbius*. On peut le représenter par un morceau de surface dont la fonction $\mathbf{r}(u, v)$ a la propriété

$$\mathbf{r}(1, t) = \mathbf{r}(t, 0) ,$$

ce qui implique $C_1 = C_4$ (notations de (5.1)). On peut écrire les formules explicites de plusieurs manières[6] toutes compliquées et pas très instructives. La figure 2 permet de se faire une idée

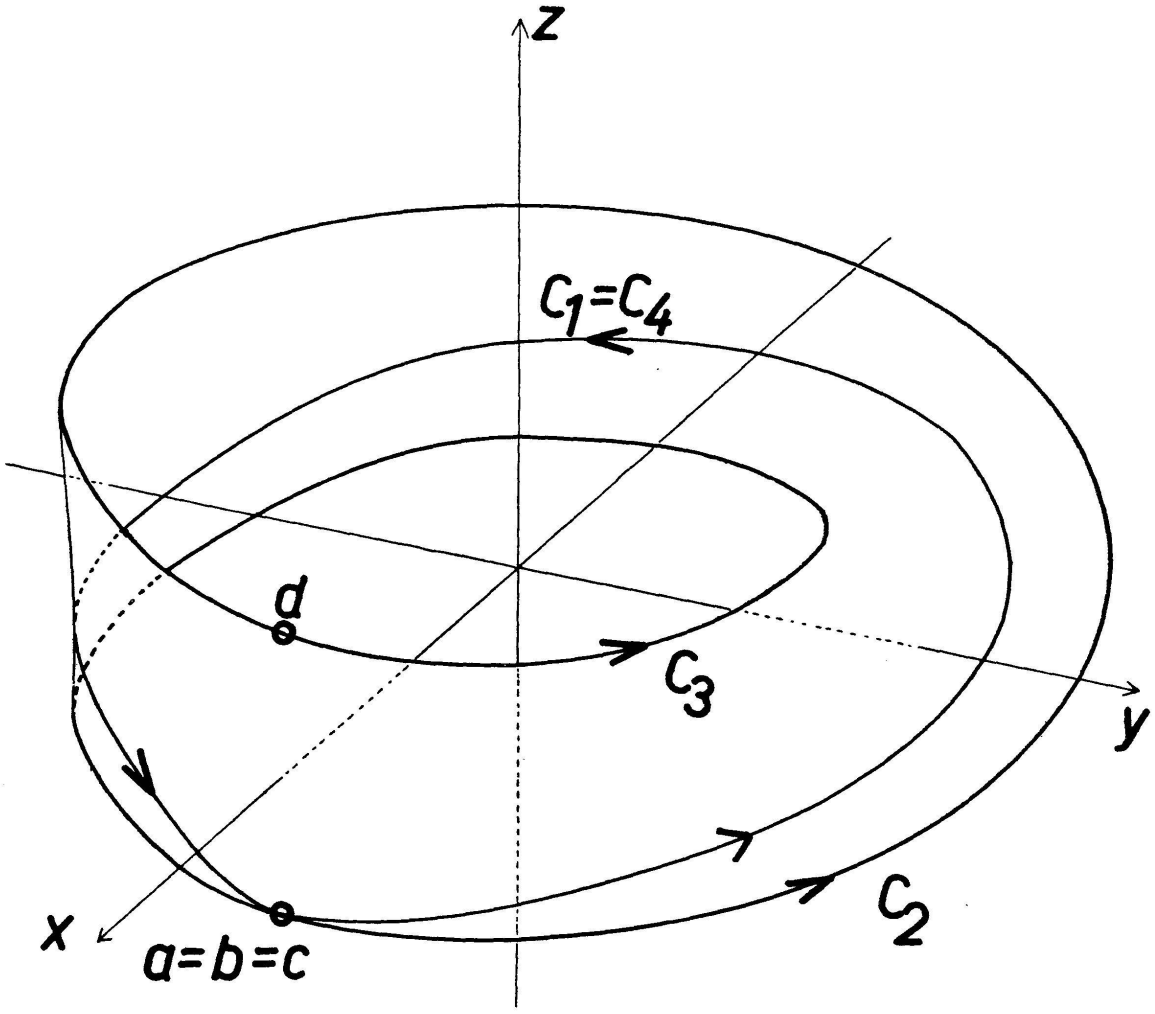

FIG. 2.

Ruban de Möbius obtenu par une application différentiable du carré unité
Les points a, b, c, d sont les images des sommets.
La figure correspond à peu près aux formules du texte
avec $L = \frac{1}{2} \cdot \cos(\pi u (1 - v))$.

---

[6] Prendre, par exemple:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left\{\cos\theta \cdot (1 - L \sin\tfrac{1}{2}\theta),\ \sin\theta \cdot (1 - L \sin\tfrac{1}{2}\theta),\ L \cos\tfrac{1}{2}\theta\right\},$$

où $\theta = 2\pi(u + v - 1)$ et $L = l \cos(\pi u (1 - v))$, $0 \leqq u, v \leqq 1$ ($2l$ est la largeur du ruban).

de l'application $\mathbf{r}(u, v)$. L'essentiel ici est bien entendu de voir que la formule du bord montre que le bord du ruban de Möbius n'est pas la seule courbe frontière (au sens intuitif) qui est représentée par $(-1)(C_2 + C_3)$ avec nos notations, mais pour la paramétrisation ci-dessus $bS = 2C_1 + (-1)(C_2 + C_3)$, la contribution de la courbe C_1 étant tout à fait inattendue de l'intuition. Si l'on prend l'expression correcte ci-dessus pour le bord, la formule de Stokes est alors valable, comme il sera démontré au paragraphe suivant.

7. La formule de Stokes.

On définit comme suit les intégrales curvilignes et de surface. Soit $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs (fonction associant à tout point d'une région de l'espace un vecteur qui dépend de manière continue de l'argument), l'intégrale $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de $\mathbf{F}$ le long de la courbe C est définie d'abord dans le cas où C est un morceau. On pose

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}^{\cdot}(t)\, dt\,, \tag{7.1}$$

où $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $\mathbf{r}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ étant la fonction qui définit C. Dans le cas plus général où C est une courbe: $C = n_1 C_1 + \ldots + n_k C_k$, où $C_1, \ldots, C_k$ sont des morceaux, on pose

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i n_i \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,. \tag{7.2}$$

Pour l'intégrale de surface, l'exigence de la linéarité[7] permet à nouveau de n'avoir à donner de formule explicite que dans le cas du morceau. Soir $\mathbf{r}(u, v)$ un morceau de surface S ($0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$). On pose

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{F}(u, v) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du dv \tag{7.3}$$

[7] La non-contradiction de cette exigence avec la convention de négliger les éléments dégénérés est aisément vérifiée en constatant que l'intégrale étendue à un morceau dégénéré est nulle.