Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1957)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FORMULES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE

Autor: Kervaire, Michel A.

Kapitel: 7. La formule de Stokes.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33741

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

de l'application $\mathbf{r}(u, v)$. L'essentiel ici est bien entendu de voir que la formule du bord montre que le bord du ruban de Möbius n'est pas la seule courbe frontière (au sens intuitif) qui est représentée par $(-1)(C_2 + C_3)$ avec nos notations, mais pour la paramétrisation ci-dessus $bS = 2C_1 + (-1)(C_2 + C_3)$, la contribution de la courbe C_1 étant tout à fait inattendue de l'intuition. Si l'on prend l'expression correcte ci-dessus pour le bord, la formule de Stokes est alors valable, comme il sera démontré au paragraphe suivant.

7. La formule de Stokes.

On définit comme suit les intégrales curvilignes et de surface. Soit $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs (fonction associant à tout point d'une région de l'espace un vecteur qui dépend de manière continue de l'argument), l'intégrale $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de $\mathbf{F}$ le long de la courbe C est définie d'abord dans le cas où C est un morceau. On pose

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}^{\cdot}(t)\, dt\,, \tag{7.1}$$

où $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $\mathbf{r}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ étant la fonction qui définit C. Dans le cas plus général où C est une courbe: $C = n_1 C_1 + \ldots + n_k C_k$, où $C_1, \ldots, C_k$ sont des morceaux, on pose

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i n_i \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,. \tag{7.2}$$

Pour l'intégrale de surface, l'exigence de la linéarité[7] permet à nouveau de n'avoir à donner de formule explicite que dans le cas du morceau. Soir $\mathbf{r}(u, v)$ un morceau de surface S ($0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$). On pose

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{F}(u, v) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du dv \tag{7.3}$$

[7] La non-contradiction de cette exigence avec la convention de négliger les éléments dégénérés est aisément vérifiée en constatant que l'intégrale étendue à un morceau dégénéré est nulle.

où l'intégrale double (de la fonction numérique $\mathbf{F}(u, v) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$) est étendue au carré unité $0 \leqq u, v \leqq 1$. On a dénoté par $\mathbf{F}(u, v)$ le vecteur $\mathbf{F}(x_1(u, v)\, x_2(u, v), x_3(u, v))$, où $\mathbf{r}(u, v) = \{x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)\}$.

Soit S une surface dont les morceaux admettent des dérivées partielles *secondes* continues et $\mathbf{F}$ un champ de vecteur. Le théorème de Stokes affirme que

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,, \quad \text{où} \quad C = bS\,, \tag{7.4}$$

pourvu que $\mathbf{F}$ ait des dérivées partielles premières continues dans une région contenant S.

Démonstration. — Il est suffisant de se limiter au cas où S est un *morceau* de surface si: $S = n_1 S_1 + \ldots + n_k S_k$, où les S_i sont des morceaux, alors

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_1^k n_i \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

et si l'on sait que (7.4) vaut pour un morceau, on en tire

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_1^k n_i \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_1^k n_i \oint_{bS_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{bS} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

car

$$bS = \sum_1^k n_i\, bS_i\,.$$

Soit donc S un morceau $\mathbf{r}(u, v)$, $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$. On a besoin de la formule auxiliaire

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{F}_u \cdot \mathbf{r}_v - \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{r}_u = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_v)_u - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u)_v\,, \tag{7.5}$$

la deuxième égalité étant triviale (continuité des dérivées partielles secondes de $\mathbf{r}$).

On a

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du dv = \iint (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_v)_u\, du dv - \\ - \iint (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u)_v\, du dv\,.$$

Par intégration partielle de la première intégrale selon u et de la seconde selon v, il vient (avec les notations de (5.1)):

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{S} = \int_0^1 (\mathbf{F}(1, v) \,.\, \dot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}(0, v) \,.\, \dot{\mathbf{r}}_2)\, dv - \int_0^1 (\mathbf{F}(u, 1) \,.\, \dot{\mathbf{r}}_3 - \\ - \mathbf{F}(u, 0) \,.\, \dot{\mathbf{r}}_4)\, du$$

et en appelant t la variable d'intégration dans chaque intégrale:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{S} = \int_0^1 (\mathbf{F}(1, t) \,.\, \dot{\mathbf{r}}_1\, dt - \int_0^1 \mathbf{F}(0, t) \,.\, \dot{\mathbf{r}}_2\, dt - \int_0^1 \mathbf{F}(t, 1) \,.\, \dot{\mathbf{r}}_3\, dt + \\ + \int_0^1 \mathbf{F}(t, 0) \,.\, \dot{\mathbf{r}}_4\, dt = \int_{C_1} \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} - \int_{C_3} \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} = \\ = \oint_{\dot{b}S} \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} \text{ (cf. (7.2))}.$$

Il reste à prouver la formule (7.5), ce qui est mécanique: Comme $\mathbf{F}$ intervient linéairement dans (7.5), il suffit de démontrer cette formule pour un champ spécial de la forme $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant et f une fonction numérique (en effet, en choisissant une base vectorielle $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, on a bien $\mathbf{F} = f_1\, \mathbf{a}_1 + f_2\, \mathbf{a}_2 + f_3\, \mathbf{a}_3$. Si la formule (7.5) est prouvée pour chaque $f_i\, \mathbf{a}_i$ elle l'est par linéarité pour $\mathbf{F}$ lui-même). Soit donc $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, la formule à prouver se réduit à $\nabla \times f\mathbf{a} \,.\, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = f_u\, \mathbf{a} \,.\, \mathbf{r}_v - f_v\, \mathbf{a} \,.\, \mathbf{r}_u$. On a

$$\nabla \times f\mathbf{a} \,.\, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \nabla f \times \mathbf{a} \,.\, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,,$$

d'après (2.3), puis

$$= \begin{vmatrix} \nabla f \,.\, \mathbf{r}_u & \nabla f \,.\, \mathbf{r}_v \\ a \,.\, \mathbf{r}_u & a \,.\, \mathbf{r}_v \end{vmatrix}, \text{ d'après (2.1)},$$

$$= \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ \mathbf{a} \,.\, \mathbf{r}_u & \mathbf{a} \,.\, \mathbf{r}_v \end{vmatrix}, \text{ d'après (2.2), c.q.f.d.}$$