Troisième exposé

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

on définit une solution de (10) égale à 1 pour $x = 0$, définie sur l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, de partie réelle positive; de plus, elle reste continue si l'on pose $e\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ et $e\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$.

Prolongeons la définition de $e(x)$ à R en posant $e(x + \pi) = -e(x)$; on voit aussitôt que $e(x)$ est continue sur R; elle est dérivable, avec dérivée vérifiant (10), sauf peut-être aux points $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, k étant entier. Il est aisé de se défaire de cette restriction, en raisonnant, par exemple, comme suit:

La fonction $e\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - ie(x)$ est nulle, par exemple pour $x = -\frac{\pi}{4}$, donc étant solution de (10) pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, elle est nulle sur cet intervalle, donc aussi, par le prolongement, pour tout x non multiple entier de $\frac{\pi}{2}$; donc, étant continue, elle est identiquement nulle; et, comme $e\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est dérivable pour $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $e(x)$ l'est aussi, avec la valeur correcte de la dérivée.

On a donc prouvé les théorèmes 3 et 4.

Remarque. — De $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, on déduit

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{du}{1 + u^2},$$

d'où l'on déduit immédiatement $2 < \pi < 4$, et facilement $\pi = 3{,}1 \ldots$

Autre remarque. — Soit $r = u + iv$ un nombre complexe quelconque, la fonction exponentielle solution de (7) n'est autre que $e^{ux} e^{ivx}$, qu'on posera égal à e^{rx}; ceci définit, en faisant $x = 1$, e^r pour r complexe de façon compatible avec ce qui précède, avec (1) et avec le développement en série.

Troisième exposé

La fonction de variable complexe

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \ldots \qquad (15)$$

est partout définie et vérifie l'identité différentielle

$$d\,e^z = e^z\,dz \tag{16}$$

Théorème. — Pour que les nombres complexes x et y, ce dernier non nul, vérifient $y = e^x$, il faut et il suffit qu'il existe un chemin c d'origine 1, d'extrémité y, évitant 0, tel que

$$\int_c \frac{du}{u} = x\,. \tag{17}$$

Démonstration. — « Il suffit »:

Soit $u = g(t)$ la fonction de $t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ définissant le chemin c; g est supposée non nulle, continue, et par morceaux continûment dérivable, avec $g(0) = 1$ et $g(1) = y$; par hypothèse, on a

$$x = \int_c \frac{du}{u} = \int_0^1 \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt\,.$$

Posons, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$v(t) = \int_0^t \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt \quad \text{et} \quad f(t) = e^{v(t)}\,.$$

D'après (16), on a

$$f'(t)\,g(t) = f(t)\,g'(t)$$

donc le rapport $f(t)/g(t)$ est constant par morceaux, donc constant par continuité, donc égal à 1 puisque $f(0) = g(0) = 1$; de sorte qu'on a pour $t = 1$

$$y = g(1) = f(1) = e^x \qquad \text{c.q.f.d.}$$

« Il faut »:

Pour tout $x = a + ib$, il existe un chemin c tel que (17); en effet, définissons c comme composé d'un chemin c' sur l'axe réel et d'un chemin c'' sur un cercle centré en 0; le choix de c' pour que $\int_c \frac{du}{u} = a$ est possible puisque l'intégrale $\int \frac{du}{u}$ est divergente en 0 et à l'infini; d'autre part, si on paramètre un cercle centré à l'origine, privé de son point négatif, par

$$X = R\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad Y = R\,\frac{2\,t}{1 + t^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad X + iY = R\,\frac{1 + it}{1 - it}$$

on a, sur ce cercle

$$\int \frac{du}{u} = 2\,i \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{dt} =$ est un nombre fini non nul, noté π, et l'intégrale sur le cercle entier vaut $2i\pi$; le choix de c'' pour que $\int_{c''} \frac{du}{u} = ib$ est donc toujours possible.

D'après « il suffit », l'extrémité y du chemin c tel que (17) est e^x.

Remarque. — Le chemin ainsi défini n'a pour extrémité 1 que si x est multiple entier de $2i\pi$; donc ces nombres sont les seuls tels que $e^x = 1$.

Autre remarque. — Si

$$\int_c \frac{du}{u} = x\,, \quad \int_d \frac{du}{u} = y\,, \quad \text{on a} \quad \int_{c+e^x d} \frac{du}{u} = x + y\,,$$

et le chemin $c + e^x d$ a pour extrémité $e^x e^y$, donc on a (1).

Reçu le 13 mars 1957.