2. Preparations.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Furthermore, the derivation is of a quite elementary nature and therefore of some independent interest. In fact, we shall start from the simple combinatorial formula (2.4) and from it derive all results by a direct procedure without presupposing any knowledge concerning random walks and without using any analytical tools.

2. Preparations.

Let $X_1, X_2, \ldots$ denote an infinite sequence of mutually independent random variables each assuming the values ± 1 with probability $\frac{1}{2}$. Put

$$S_0 = 1, \qquad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad (n \geq 1) \tag{2.1}$$

Then S_n is to be interpreted as the coordinate, at time n (or after n steps), in a one-dimensional symmetric random walk starting from the origin. *A return to the origin occurs at time n if* $S_n = 0$. Obviously n must be even. For the probability of such a return we write

$$u_n = P\{S_n = 0\}, \qquad u_0 = 1 \tag{2.2}$$

Clearly

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \qquad u_{2n-1} = 0 . \tag{2.3}$$

All our considerations will depend on the following simple and well known Lemma:

$$\sum_{r=0}^{n} u_{2r}\, u_{2n-2r} = 1 . \tag{2.4}$$

Proof. We introduce the generating function

$$U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} s^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} s^{2n} = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} . \tag{2.5}$$

It is then clear that the left side on (2.4) equals the coefficient of s^{2n} in $U^2(s) = (1 - s^2)^{-1}$, and thus (2.4) is true.