7. Le cas de irrationnel (suite). Les ensembles $H^{(n)}$ de Piatecki-Shapiro.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

7. Le cas de ξ irrationnel *(suite)*. Les ensembles $H^{(n)}$ de Piatecki-Shapiro.

Le résultat ci-dessus ne résoud pas entièrement le problème de la classification des ensembles cantoriens $E(\xi)$ à rapport constant ξ suivant les valeurs de ξ. Il laisse en effet intact le problème de savoir si la condition $\xi = 1/\theta$, $\theta \in C$ est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que $E(\xi)$ soit un ensemble U. Ainsi que nous l'avons vu plus haut, il ne suffit pas de montrer — ce qui est facile — que le coefficient de Fourier-Stieltjes c_n de (2) ne tend pas vers zéro quand $\xi = \frac{1}{\theta}$, $\theta \in C$ pour en conclure que $E(\xi)$ est un ensemble U.

La solution du problème a été rendue possible par la découverte, par Piatecki-Shapiro, d'un nouveau type d'ensemble d'unicité, les ensembles du type $H^{(n)}$ qui ne se réduisent pas aux ensembles H ou à leur union. Considérons le cas de $n = 2$, qui est typique.

Nous dirons qu'une suite de vecteurs V de coordonnées entières p_k, q_k dans l'espace euclidien R^2 est normale si quels que soient les entiers fixes a, b l'expression $|ap_k + bq_k|$ croît indéfiniment avec k.

Ceci dit, considérons un ensemble E contenu pour fixer les idées dans (0, 1). Soit $x \in E$ et considérons le point P de coordonnées $p_k x$, $q_k x$ réduites modulo 1, c'est-à-dire prises sur le tore unité dans R^2. Si quel que soit $x \in E$, et quel que soit k le point P_k n'appartient jamais à un certain ensemble G ouvert du tore, on dit que E est du type $H^{(2)}$. L'analogie avec les ensembles du type H est évidente, et la généralisation à l'espace euclidien R^n est immédiate, fournissant des ensembles du type $H^{(n)}$.

Grâce au théorème de Piatecki-Shapiro, d'après lequel tout ensemble du type $H^{(n)}$ est un ensemble U, on peut démontrer que l'ensemble cantorien $E(\xi)$ à rapport constant ξ où $\xi = 1/\theta$, $\theta \in C$ est un ensemble U. On démontre, en effet, que si θ est de degré n, $E(\xi)$ est de type $H^{(n)}$ précisément. Le vecteur « normal » V_k qu'on considère ici a pour coordonnées les entiers

$$a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \cdots a_{k+n}$$

où $a_s = \theta^s + \varepsilon_s$ et $\varepsilon_s \to 0$ et le fait qu'il est normal se démontre en remarquant que quels que soient les entiers $c_1 \dots c_n$ on a toujours

$$c_1 + c_2\,\theta + \cdots + c_n\,\theta^{n-1} \neq 0$$

puisque θ est de degré n. C'est ainsi que s'établit la relation entre le type de l'ensemble et le degré de l'entier algérbique θ.

BIBLIOGRAPHIE

Sur la théorie générale, consulter:

A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Warszawa-Lewow, 1953, mais plus spécialement la nouvelle édition de cet ouvrage, qui est sur le point de paraître en Angleterre, Cambridge University Press.

Sur les ensembles U et M, on consultera:

N. Bari, *The uniqueness problem*, Translation No. 52 of the American Mathematical Society (translated from *Uspechi Mat. Nauk* (1949)).

Mémoires originaux.

D. E. Menchoff, Sur l'unicité du développement trigonométrique. *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, vol. 163 (1916), pp. 433-436.

A. Rajchman, Sur l'unicité du développement trigonométrique. *Fundamenta Mathematica*, 3 (1922), pp. 286-302.

N. K. Bari, Sur le rôle des lois diophantiques dans le problème de l'unicité du développement trigonométrique. *Rec. Math. de Moscou N. S.*, 2 (44) (1937), pp. 99-724.

R. Salem, Sets of uniqueness and sets of multiplicity. *Trans. Am. Math. Soc.*, 54 (1943), pp. 218-228 et 56 (1944), pp. 32-49.

—— Rectification to the papers « Sets of uniqueness and sets of multiplicity ». *Trans. Am. Math. Soc.*, 63 (1948), pp. 595-598.

Piatecki-Shapiro, *Uspekhi Mat. Nauk*, 8 (1953), pp. 167-170 et *Ucenye Zapiski Mosc.* (1954).

R. Salem et A. Zygmund, Sur un théorème de Piatecki-Shapiro. *Comptes rendus*, 240 (1955), pp. 2040-2042.

—— et A. Zygmund, Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant. *Comptes rendus*, 240 (1955), pp. 2281-2283.

Sur les nombres de la classe C, on consultera:

C. Pisot, La répartition modulo 1 et les nombres algébriques. *Annali di Pisa*, 7 (1938), pp. 205-248.

R. Salem, A remarkable class of algebraic integers. *Duke Math. Journ.*, 11 (1944), pp. 103-108.

J. W. S. Cassels, Diophantine Approximation. *Cambridge tracts No. 45* (Camb. Univ. Press, 1957).