# SUR QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LES POINTS AUX COORDONNÉES ENTIÈRES

Autor(en): **Sierpiski, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-34624

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# SUR QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LES POINTS AUX COORDONNÉES ENTIÈRES

par W. Sierpiński, Varsovie

*(Reçu le 23 octobre 1957)*

Appelons, pour abréger, points du réseau les points $(x, y)$ du plan dont les coordonnées $x$ et $y$ (dans un système rectangulaire) sont des nombres entiers.

M. H. Steinhaus a posé récemment (dans « Matematyka » — journal polonais pour les professeurs des écoles secondaires — fascicule 2 (46), 1957, p. 58, problème 498) le problème de démontrer qu'*il existe pour tout nombre naturel* n *un cercle* (dans le plan) *qui contient en son intérieur exactement* n *points du réseau.*

Voici la démonstration élémentaire de cette proposition dont une simplification est due à M. André Schinzel (voir page 71 de ce fascicule).

Lemme. *Tout cercle dont le centre est le point* $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ *contient sur sa circonférence au plus un point du réseau.*

Démonstration du lemme. Supposons que $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ sont deux points du réseau distincts situés sur le cercle de centre $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$. On a donc l'égalité

$$(x_1 - \sqrt{2})^2 + \left(y_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = (x_2 - \sqrt{2})^2 + \left(y_2 - \frac{1}{3}\right)^2,$$

d'où

$$2(x_2 - x_1)\sqrt{2} = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + \frac{2}{3}(y_1 - y_2).$$

Le nombre $\sqrt{2}$ étant irrationnel, on en déduit $x_1 - x_2 = 0$, donc aussi $y_2^2 - y_1^2 + \frac{2}{3}(y_1 - y_2) = 0$, c'est-à-dire

$(y_2 - y_1) \times \left(y_2 + y_1 - \frac{2}{3}\right) = 0$ et, comme $y_2 + y_1 - \frac{2}{3} \neq 0$ (puisque $y_1$ et $y_2$ sont des entiers), on en tire $y_2 - y_1 = 0$. On a donc $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$, d'où $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, contrairement à l'hypothèse que les points $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ sont distincts. Le lemme est donc démontré.

Démonstration de la proposition de M. H. Steinhaus. — Soit $n$ un nombre naturel donné. Il est évident que tout cercle situé dans le plan dont le rayon est suffisamment grand contient en son intérieur plus que $n$ points du réseau. En particulier, il existe un cercle $K$ de centre $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ contenant en son intérieur plus que $n$ points du réseau. Or, il résulte du lemme que les points du réseau distincts ont des distances au point P distinctes. Tous les points du réseau intérieurs au cercle $K$ (dont le nombre est évidemment fini) peuvent donc être rangés en une suite suivant leurs distances croissantes au point P: soit $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$ cette suite. Soit $K_n$ le cercle de centre P passant par le point $p_{n+1}$. Il est évident que les seuls points du réseau situés à l'intérieur du cercle $K_n$ sont les points $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Leur nombre étant $n$, la proposition de M. H. Steinhaus se trouve ainsi démontrée.

Il est à remarquer qu'on ne pourrait pas remplacer dans notre démonstration le point $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ par aucun point aux coordonnées rationnelles. En effet, comme l'a remarqué M. A. Schinzel, si $k$ et $l$ sont des entiers et $m$ un nombre naturel, alors, dans le cas où un au moins des nombres $k$ et $l$ est non nul, les points du réseau $(l, -k)$ et $(-l, k)$ sont distincts et ont la même distance au point $\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{m}\right)$, et si $k = l = 0$, les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ ont la même distance au point $(0, 0)$.

D'une façon analogue on pourrait démontrer qu'*il existe pour tout nombre naturel* n *une sphère* (dans l'espace à 3 dimensions) *qui contient en son intérieur exactement* n *points aux coordonnées entières.*

Pour démontrer cette proposition, il suffirait de se baser sur le lemme que, $u$, $v$ et $w$ étant des nombres rationnels tels que le nombre $u\sqrt{2} + v\sqrt{3} + w\sqrt{5}$ est rationnel, on a

$u = v = w = 0$. Il en résulte que toute sphère de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ passe par au plus un point à coordonnées entières. Il ne reste ensuite qu'à modifier d'une façon évidente la démonstration de la proposition pour le cercle.

Quant au problème de M. H. Steinhaus, il est encore à remarquer qu'il serait difficile de trouver pour tout $n$ naturel une formule pour le rayon $r_n$ du cercle de centre $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ passant par un point du réseau et contenant en son intérieur exactement $n$ points du réseau. Or, il n'est pas difficile de donner une formule asymptotique pour le rayon $r_n$ et d'en déduire que, pour $n$ grand, $r_n$ est approximativement égal à $\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

En effet, soit $Q$ un point quelconque du plan, $K$ un cercle de centre $Q$ et de rayon $r$. A tout point $(x, y)$ du réseau faisons correspondre un carré de côtés $= 1$ et parallèles aux axes des coordonnées et dont le centre est le point $(x, y)$. Soit S la surface formée par la somme de tous les carrés correspondants aux points du réseau intérieurs au cercle K.

Soit $K_1$ le cercle de centre Q et de rayon $r + \sqrt{\frac{1}{2}}$. Comme $\sqrt{\frac{1}{2}}$ est la plus grande distance d'un point du carré de surface 1 à son centre, on voit sans peine que le cercle $K_1$ avec son intérieur recouvre la surface S. Or, il est évident que la mesure de S est égale au nombre $n$ de points du réseau intérieurs au cercle K. Il en résulte que

$$n \leqslant \pi \left(r + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 .$$

D'autre part on démontre pareillement que S couvre le cercle de centre Q et de rayon $r - \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où

$$\pi \left(r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leqslant n .$$

Donc, si un cercle (situé dans le plan) de rayon $r$ contient en son intérieur $n$ points du réseau, on a

$$\pi \left(r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leqslant n \leqslant \pi \left(r + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 .$$

Il en résulte tout de suite que

$$\lim_{n=\infty} \frac{r_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot$$

Donc, pour $n$ grand, le rayon d'un cercle de centre P et contenant en son intérieur exactement $n$ points du réseau est approximativement égal à $\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

Il y a plus de 50 ans, je me suis occupé [1] de l'évaluation du nombre de points du réseau contenus dans un cercle de rayon $r$ et j'ai démontré que ce nombre diffère de $\pi r^2$ d'un nombre inférieur à $Ar^{\frac{2}{3}}$, où A est une constante indépendante de $r$. Ce résultat fut ensuite amélioré par VAN DER CORPUT, LANDAU, LITTLEWOOD et WALFISZ [2].

Une modification du problème de M. H. STEINHAUS est le problème de démontrer qu'*il existe pour tout nombre naturel* n *un carré situé dans le plan qui contient en son intérieur exactement* n *points du réseau.*

Voici la démonstration de cette proposition basée sur une idée de M. Georges BROWKIN, modifiée par moi avec l'aide de M. André SCHINZEL.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y) = \left| x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right| + \left| x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| \cdot$$

Nous prouverons que pour $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ entiers et $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ on a $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$.

Supposons donc que les nombres $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ sont entiers et qu'on a $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. On a donc l'égalité

$$\varepsilon_1\left(x_1 + y_1\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right) + \varepsilon_2\left(x_1\sqrt{3} - y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \varepsilon_3\left(x_2 + y_2\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right) + \varepsilon_4\left(x_2\sqrt{3} - y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

---

1) O pewnem zagadnieniu z rachunku funkcyj asymptotycznych. *Prace Matematyczno-Fizyczne*, **17** (1906), pp. 77-118.

2) Voir E. LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. II, Leipzig, 1927, pp. 183 et suivantes.

où $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = \varepsilon_4^2 = 1$. Cela donne

$$\varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 y_1 - \varepsilon_3 x_2 + \varepsilon_4 y_2 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{3} =$$
$$= \left(- \varepsilon_1 y_1 - \varepsilon_2 x_1 + \varepsilon_3 y_2 + \varepsilon_4 x_2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}{3}\right) \sqrt{3}$$

et, comme $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel, cela donne

$$\varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 y_1 - \varepsilon_3 x_2 + \varepsilon_4 y_2 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{3} = 0 \tag{2}$$

et

$$- \varepsilon_1 y_1 - \varepsilon_2 x_1 + \varepsilon_3 y_2 + \varepsilon_4 x_2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}{2} = 0 .$$

Les nombres
$\varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 y_1 - \varepsilon_3 x_2 + \varepsilon_4 y_2$ et $- \varepsilon_1 y_1 - \varepsilon_2 x_1 + \varepsilon_3 y_2 + \varepsilon_4 x_2$ étant entiers et les nombres $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ et $\varepsilon_2 - \varepsilon_4$ étant en valeur absolue $\leqslant 2$, les égalités (2) prouvent que $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$ et qu'on a

$$\varepsilon_1 (x_1 - x_2) - \varepsilon_2 (y_1 - y_2) = 0 \quad \text{et} \quad - \varepsilon_1 (y_1 - y_2) - \varepsilon_2 (x_1 - x_2) = 0 .$$

Si $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$, cela donne $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ et $x_1 - x_2 = - (y_1 - y_2)$, d'où $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. Si $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = - 1$, on trouve
$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0$ et $- (y_1 - y_2) + (x_1 - x_2) = 0$, ce qui donne aussi $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. On a donc toujours $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ et la propriété de la fonction (1) est démontrée. La fonction $f(x, y)$ prend donc pour les points distincts du réseau des valeurs distinctes.

On peut donc ordonner tous les points $p(x, y)$ du réseau d'après la grandeur de la fonction $f(x, y)$ qui leur correspond. Soit $p_1, p_2, \ldots$ cette suite.

Soit $n$ un nombre naturel donné et soit $p_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ et $a_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$. Posons

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y) &= x(1 + \sqrt{3}) + y(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} , \\ \psi(x, y) &= x(1 - \sqrt{3}) + y(1 + \sqrt{3}) - \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} . \end{aligned} \right. \tag{3}$$

On vérifie sans peine que des quatre droites

$$(4) \qquad \varphi(x, y) = a_{n+1}, \qquad \varphi(x, y) = -a_{n+1}, \qquad \psi(x, y) = a_{n+1},$$
$$\psi(x, y) = -a_{n+1}$$

les deux premières sont parallèles, ainsi que les deux dernières, et que les deux premières sont orthogonales aux deux dernières. Les quatre droites (4) déterminent donc un carré K, et pour qu'un point $(x, y)$ du plan soit intérieur à ce carré, il faut et il suffit qu'on ait simultanément

$$(5) \qquad |\varphi(x, y)| < a_{n+1} \quad \text{et} \quad |\psi(x, y)| < a_{n+1}.$$

Or, on démontre sans peine que pour les nombres réels $a$, $b$ et $c$ l'ensemble des inégalités $|a| < c$ et $|b| < c$ équivaut à l'inégalité $\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c$.
Comme d'après (4)

$$\frac{\varphi(x, y) + \psi(x, y)}{2} = x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3},$$
$$\frac{\varphi(x, y) - \psi(x, y)}{2} = x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}},$$

on trouve donc, d'après (1), que les inégalités (5) sont équivalentes à l'inégalité $f(x, y) < a_{n+1}$ et vu la définition des points $p_1$, $p_2$, ..., cette inégalité est remplie, pour les points du réseau, par les points $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ et seulement par ces points. On a donc, à l'intérieur du carré K exactement $n$ points du réseau et notre proposition se trouve démontrée.

Or, M. G. Browkin a démontré qu'il existe pour tout $n$ naturel un cube (dans l'espace à 3 dimensions) qui contient en son intérieur exactement $n$ points à coordonnées entières.

Quant à la proposition concernant le cercle, elle a été généralisée par MM. A. Schinzel et F. Kulikowski qui ont démontré que pour tout ensemble plan non vide, borné, ouvert et convexe E et pour tout nombre naturel $n$ il existe dans le plan un ensemble semblable à E (au sens géométrique) qui contient précisément $n$ points du réseau.

Les démonstrations de ces propositions paraîtront ailleurs.

Pour les cercles il se pose le problème s'il existe pour tout nombre naturel $n$ un cercle dont la circonférence contient précisément $n$ points du réseau. Comme l'a prouvé A. SCHINZEL, la réponse à ce problème est positive. Il a notamment démontré d'une façon élémentaire que pour $n$ impairs tel est le cercle $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{5^{n-1}}{9}$ et pour $n$ pairs le cercle $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{5^{\frac{n}{2}-1}}{4}$.

La démonstration paraîtra dans un fascicule prochain de cette revue, ainsi que la généralisation de cette proposition à l'espace à $m>2$ dimensions, trouvée par M. KULIKOWSKI.

M. H. STEINHAUS (dans sa lettre à l'auteur de cet article du 18.X.1957) a posé le problème s'il existe pour tout ensemble plan borné mesurable au sens de Lebesgue de mesure superficielle $n$ un ensemble superposable avec lui qui contienne précisément $n$ points du réseau [3]. Or M. STEINHAUS a démontré qu'il existe pour tout nombre naturel $n$ un cercle de surface $n$ qui contient à son intérieur précisément $n$ points du réseau.

---

[3]) Cf. G. PÓLYA et G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, II (1952), Abt. 8, Aufgabe 242.