1. La variété espace-temps.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

repérage de l'espace et du temps, il est naturel d'avoir recours à une variété V_4 à quatre dimensions, trois d'espace et une de temps et qui sera telle qu'à chacun de ses points corresponde un événement déterminé. Cette variété est la variété *espace-temps* de la théorie de la relativité. On la rapporte à des systèmes de coordonnées curvilignes quelconques et on y cherche une représentation tensorielle des lois physiques [1]. Aussi nous sera-t-il utile de rappeler certaines définitions classiques de la théorie de la relativité; mais nous supposerons connue la théorie des espaces de Riemann [2]. Nous cherchons à préciser la notion d'inductions électromagnétiques dans le nouveau mode de représentation afin de formuler d'une manière correcte les équations correspondantes de la théorie de MAXWELL. C'est ce qui va faire l'objet de la première partie de notre exposé. Nous continuerons par une étude des caractéristiques de ces équations en établissant que les rayons électromagnétiques sont les géodésiques de longueur nulle d'une variété riemannienne associée $\overline{V}_4$. L'étude géométrique des rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions fournira l'énoncé du principe de FERMAT, dont l'existence est liée à celle d'univers stationnaire et de mouvements permanents.

Nous utiliserons les symboles ∇_α pour désigner les dérivées covariantes et ∂_α pour désigner les dérivées partielles $\left(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)$.

I. INDUCTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET ÉQUATIONS RELATIVISTES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

1. La variété espace-temps.

Dans la théorie de la relativité générale, l'espace-temps est une variété différentiable à quatre dimensions V_4 de classe de différentiabilité C^2, C^4 par morceaux, sur laquelle est définie une métrique riemannienne ds^2 de type hyperbolique normal,

---

1) Cette représentation indépendante du mode de repérage dans la variété V_4 a conduit historiquement à une meilleure intelligence des phénomènes de l'électrodynamique des corps en mouvement.

2) Lire par exemple A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel* (A. Colin, Paris, 1950).

à un carré positif et trois carrés négatifs. Cette métrique dite *métrique d'univers* a, dans un système de coordonnées admissibles (x^α), pour expression locale

$$(1.1) \qquad ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)\ .$$

La variété V_4 possède en chaque point un espace vectoriel tangent du type de MINKOWSKI.

L'équation $ds^2 = 0$ définit en chaque point x de V_4 un cône réel C_x de directions tangentes à V_4 dit *cône élémentaire* en x. Une direction $d\vec{x}$ en x est dite orientée dans le temps ou dans l'espace selon qu'elle est intérieure ($ds^2 > 0$) ou extérieure ($ds^2 < 0$) au cône C_x. Une courbe Γ de V_4 est orientée dans le temps si les tangentes en ses différents points sont orientées dans le temps. Un 3-plan tangent en x à V_4 est orienté dans l'espace si toutes ses directions sont orientées dans l'espace. Il est orienté dans le temps s'il admet des directions orientées dans le temps. Une hypersurface S à trois dimensions est orientée dans le temps ou dans l'espace selon que ses éléments plans tangents aux différents points sont orientés dans le temps ou dans l'espace. Pour qu'une hypersurface S, définie localement par $f(x^\alpha) = 0$, soit orientée dans le temps, il faut et il suffit que

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f < 0\ .$$

Pour qu'elle soit orientée dans l'espace, il faut et il suffit que $\Delta_1 f > 0$.

Les dix coefficients $g_{\alpha\beta}$ sont dits les *potentiels de gravitation* relativement au système de coordonnées locales (x^α), parce que leurs écarts à la géométrie euclidienne tangente rendent compte de la gravitation. Pour limiter la généralité de la métrique dans le cadre de la relativité générale, le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est astreint à vérifier le système des dix équations d'EINSTEIN

$$S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}$$

qui généralisent les équations de LAPLACE-POISSON.

$S_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'EINSTEIN de la variété riemannienne V_4. Il est d'origine géométrique. La description de l'état de la

distribution énergétique est faite par le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$, suivant des schémas de type hydrodynamique. On dit qu'un domaine D_4 de l'espace-temps est occupé par une distribution énergétique schématisée sous forme de *fluide*, si sur le domaine D_4 sont définis

1) un champ de scalaire ρ dit *densité propre* du fluide,

2) un champ de vecteur unitaire orienté dans le temps $\vec{u}$ dit *vecteur vitesse unitaire* dont les trajectoires sont appelées les lignes de courant du fluide.

On appellera *repère propre* en un point x du domaine D_4 un repère orthonormé dont le premier vecteur orienté dans le temps coïncide avec le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ et dont les trois autres vecteurs orientés dans l'espace définissent le tri-plan π_x orthogonal à $\vec{u}$ qu'on appelle *espace associé* à la direction de temps $\vec{u}$.

Le repère propre précédent joue le rôle d'un repère galiléen local par rapport auquel la matière est au repos. Il suffit d'écrire, dans ce repère, les équations relatives à la matière au repos. Puis, par un changement de repère, on en déduit l'expression générale invariante des équations relativement au repère naturel associé à un système de coordonnées locales quelconque. Inversement, l'interprétation physique des équations se fait relativement au repère propre dans l'espace tangent au point considéré. On peut aussi considérer un espace-temps de la relativité restreinte rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites dans lequel la métrique a pour expression

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

où $x^0 = ct$, c désignant la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

2. Inductions électromagnétiques et équations de MAXWELL.

La théorie de Maxwell pour la matière fait intervenir un champ électromagnétique variable avec le temps, défini par quatre vecteurs d'espace: champ électrique $\vec{E}$ et induction