Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

Autor: Quan, Pham Mau

Kapitel: 6. Espace-temps stationnaire et mouvement permanent d'un fluide parfait chargé.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

les variétés V_3^M peuvent être engendrées par les bandes de $\overline{V}_4$ définies par les géodésiques de longueur nulle $\overline{L}_0$, le 3-plan élémentaire associé étant le plan tangent au cône élémentaire $\overline{C}_x$ le long de la tangente à $\overline{L}_0$.

Nous avons démontré le théorème

THÉORÈME. — *Les bicaractéristiques des équations de* MAXWELL *sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne* $\overline{V}_4$ *munie de la métrique associée*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \,.$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques V_3^M jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. Les bicaractéristiques $\overline{L}_0$ sont les rayons électromagnétiques associés. En introduisant l'indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ du milieu, nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

THÉORÈME. — *Dans un milieu transparent isotrope d'indice de réfraction* n *variable, les rayons électromagnétiques sont des géodésiques de longueur nulle de l'espace riemannien* $\overline{V}_4$ *muni de la métrique*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \left(g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha\, u_\beta\right) dx^\alpha\, dx^\beta$$

où $g_{\alpha\beta}$ *est le tenseur métrique fondamental et* u_α *le vecteur vitesse unitaire d'univers définis en chaque point du milieu considéré.*

III. ETUDE GÉOMÉTRIQUE DES RAYONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS L'ESPACE

6. Espace-temps stationnaire et mouvement permanent d'un fluide parfait chargé.

On dit que l'espace-temps V_4 est *stationnaire* dans un domaine D_4 si la variété riemannienne définie par D_4 muni de la métrique d'univers ds^2 admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales à trajectoires z orientées dans le temps,

ne laissant invariant aucun point de D_4, la famille des lignes z ou lignes de temps satisfaisant aux hypothèses suivantes:

a) les lignes de temps sont homéomorphes à la droite réelle R;

b) on peut trouver une variété différentiable à trois dimensions D_3, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_4, telle qu'il existe un homéomorphisme de même classe de la variété D_4 sur le produit topologique $D_3 \times R$ dans lequel les z s'appliquent sur les droites facteurs. La variété quotient D_3 sera dite simplement *espace.*

On peut définir dans D_4 des systèmes de coordonnées locales (x^0, x^i), dits adaptés au caractère stationnaire, de la manière suivante. Les (x^i) sont un système de coordonnées locales arbitraire de D_3. La donnée des (x^i) détermine une ligne de temps. Pour déterminer un point sur cette ligne, on se donne la variété $x^0 = \text{const.}$ à laquelle il appartient, ces variétés étant homéomorphes à D_3. Les potentiels $g_{\alpha\beta}$ relatifs aux coordonnées adaptées sont indépendants de la variable x^0 et le vecteur $\vec{\xi}$ générateur infinitésimal du groupe d'isométries admet pour composantes contravariantes

$$\xi^0 = 1 \qquad \xi^i = 0$$

et a pour carré $\xi^2 = g_{00} > 0$.

Dans la suite on n'introduit que des systèmes de coordonnées adaptés. En effectuant la décomposition en carrés de la forme quadratique fondamentale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{6.1}$$

à partir de la variable directrice dx^0, nous obtenons

$$ds^2 = \frac{1}{g_{00}} \left(g_{0\alpha}\, dx^\alpha\right)^2 + d\hat{s}^2 \tag{6.2}$$

où

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j \equiv \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i\, dx^j \tag{6.3}$$

définit sur D_3 une métrique riemannienne définie négative.

Considérons maintenant un fluide parfait chargé conducteur en mouvement dans un domaine D_4. Le mouvement de ce fluide est dit *permanent* si l'espace-temps associé V_4 est stationnaire dans D_4 et si le groupe d'isométries laisse invariantes les quantités $(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, \theta, q_\alpha, u^\alpha, p, \delta)$. On démontre immédiatement à partir des résultats sur le problème de Cauchy que pour que le mouvement du fluide soit permanent, il faut et il suffit que l'espace-temps riemannien associé soit stationnaire dans D_4 et que son groupe d'isométries laisse invariants les champs $H_{\alpha\beta}$, θ ainsi que les coefficients $\varkappa$, c, l, ε, μ, σ.

Si le mouvement du fluide est permanent, les quantités

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha u_\beta$$

sont constantes le long des lignes de temps. Il en résulte que la variété riemannienne $\bar{V}_4$ définie par la variété différentiable portant D_4 et munie de la métrique associée, admet aussi un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point de $\bar{V}_4$, induit par celui de l'espace-temps. Il est clair que les (x^0, x^i) constituent un système de coordonnées locales adapté pour $\bar{V}_4$. On peut prendre pour générateur infinitésimal du groupe d'isométries de $\bar{V}_4$ le vecteur $\vec{\zeta}$ qui a pour composantes contravariantes $\zeta^\alpha = \xi^\alpha$. Le carré de ce vecteur a pour valeur dans $\bar{V}_4$

$$(\vec{\zeta})^2 = \bar{g}_{00} = g_{00} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) (u_0)^2 .$$

Cette quantité pouvant être positive, négative ou nulle, les trajectoires d'isométries de $\bar{V}_4$ peuvent être orientées dans le temps, dans l'espace ou être isotropes.

7. Un problème du calcul des variations.

Nous nous proposons d'interpréter géométriquement les rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions. A cet effet, nous commençons par rappeler brièvement un problème du calcul des variations.