11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

électromagnétique allant du point d'espace A (x^i) au point d'espace A' $(x^i + dx^i)$ dans le temps dx^0. De même, $M_1'M$ peut être considéré comme représentant le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point A' $(x^i + dx^i)$ au point A (x^i) dans le temps $d'x^0$.

Les deux points M_1 et M_1' sont symétriques par rapport à l'hyperplan π_x, on doit avoir

$$\bar{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = -\, \bar{g}_{0\alpha}\, d' x^\alpha \,.$$

On en déduit

$$d' x^0 = dx^0 + 2\, \frac{\bar{g}_{0i}\, dx^i}{\bar{g}_{00}} \,.$$

Cette relation montre que, sauf dans le cas statique, le temps mis par un rayon pour aller du point d'espace A (x^i) au point d'espace A' $(x^i + dx^i)$ n'est pas le même que le temps mis par un autre rayon pour aller de A' $(x^i + dx^i)$ à A (x^i).

11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

Plaçons-nous dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de MINKOWSKI, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites. Nous avons la métrique d'univers

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \,. \tag{11.1}$$

$\vec{u}$ représente dans ce cas le vecteur vitesse unitaire d'univers dont les composantes sont déterminées classiquement à partir de la vitesse d'espace $\vec{\beta}$, la vitesse limite c étant prise comme unité. Un calcul facile donne la métrique associée

$$d\bar{s}^2 = \frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}\,(dx^0)^2 + 2\,\frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\,\beta_i\, dx^0\, dx^i - \sum_i (dx^i)^2 - \\ - \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\,(\beta_i\, dx^i)^2 \,. \tag{11.2}$$

A partir de cette métrique, cherchons à exprimer le théorème de FERMAT en prenant l'arc σ du rayon électromagnétique comme paramètre. Nous avons à remplacer dans (9. 2) $\dot{x}^i$ par

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{d\,\sigma}$$

où $d\sigma^2 = -\sum_i (dx^i)^2$. Il vient

$$(11.3)\qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}[V^2-\beta^2+(1-V^2)(\beta_i\lambda^i)^2} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}(\beta_i\lambda^i) \right\} d\sigma$$

et l'on peut en déduire

$$\frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{W} = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}[V^2-\beta^2+(1-V^2)(\beta_i\lambda^i)^2} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}(\beta_i\lambda^i)\,.$$

Si $V^2 - \beta^2 \neq 0$, cette relation donne

$$(11.4)\qquad 1-\beta^2-(1-\beta^2)W^2-(1-V^2)(1-W\beta_i\lambda^i)^2 = 0\,.$$

Si on interprète $\vec{V}$ comme vitesse absolue et $\vec{W}$ comme vitesse relative de propagation de l'onde électromagnétique considérée dans l'espace euclidien ordinaire, on a manifestement

$$(11.5)\qquad \vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\,.\,\vec{\beta})^2}[\vec{\beta}^2 + 2\,\vec{W}\,.\,\vec{\beta} + (1-\beta^2)\,\vec{W}^2 + (\vec{W}\,.\,\vec{\beta})^2]\,.$$

On vérifie par un calcul direct à partir de (9.4) que cette relation reste valable dans le cas où $V^2 - \beta^2 = 0$.

En cherchant à mettre en évidence dans le crochet de (11. 5) un vecteur colinéaire à $\vec{\beta}$ et un autre qui lui est orthogonal, on obtient

$$(11.6)\qquad \vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\,.\,\vec{\beta})^2}\left[\left(1+\frac{\vec{W}\,.\,\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W}-\frac{\vec{W}\,.\,\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right]^2$$

On en déduit

$$\vec{V} = \frac{1}{1+\vec{W}\,.\,\vec{\beta}}\left[\left(1+\frac{\vec{W}\,.\,\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W}-\frac{\vec{W}\,.\,\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right]\,.$$

C'est la formule relativiste de la composition des vitesses [4].

Faculté des Sciences, Besançon.

---

[4] Cf. A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel*, chap. VII, pp. 173-175.