SUR CERTAINES SÉRIES A VALEUR IRRATIONNELLE

Autor(en): **Erdös, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-34629

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR CERTAINES SÉRIES A VALEUR IRRATIONNELLE

par Paul Erdös, Birmingham-Haïfa

(Reçu le 1er avril 1958)

§ **1.** En décembre 1956, à Birmingham, le professeur A. Oppenheim (Singapour) m'a posé le problème suivant. Soit p_n, $n = 1, 2 \ldots$, la suite des nombres premiers, la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^k}{n!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

est-elle irrationnelle ?

A ce sujet, je rappellerai le fait connu [1] que tout réel t, $0 < t \leqslant 1$, peut s'exprimer d'une et une seule manière sous la forme

$$t = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{n!}$$

avec $0 \leqslant c_n < n$ pour tout n et $c_n > 0$ pour une infinité de valeurs de n, et que t est rationnel si et seulement si

$$c_n = n - 1 \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant n_0 .$$

Dans notre cas, ce théorème n'est pas applicable, puisque $p_n > n$ pour tout n. Toutefois la somme des séries (1) est bien irrationnelle; la démonstration étant assez compliquée pour $k > 1$, je ne donnerai au § 2 que la démonstration pour $k = 1$. Par contre, je démontrerai au § 3 un théorème qui généralise cette affirmation, les dénominateurs dans (1) étant remplacés par les produits des termes d'une suite croissante d'entiers quelconques.

Enfin, je tiens à souligner que je n'ai pas réussi à démontrer l'irrationnalité de la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n\, n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n\, 2^n}.$$

Pour ce qui concerne l'irrationnalité des séries semblables, voir [2].

§ **2.** La démonstration de l'irrationnalité de la série (1) repose sur le fait que l'ensemble des nombres

$$\frac{p_n}{n} - \left[\frac{p_n}{n}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

est dense dans l'intervalle (0, 1), ce que nous démontrerons à la fin de ce paragraphe.

Ceci posé, supposons par l'absurde que la valeur de la série (1), pour $k = 1$, est rationnelle, c'est-à-dire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n!} = \frac{a}{b}$$

avec a et b entiers.

Soit $k > b$; il est alors évident que

$$\frac{p_k}{k} + \frac{p_{k+1}}{k(k+1)} + \frac{p_{k+2}}{k(k+1)(k+2)} + \cdots = (k-1)!\,\frac{a}{b}$$

est un entier positif et par suite

$$\frac{p_k}{k} - \left[\frac{p_k}{k}\right] + \frac{p_{k+1}}{k(k+1)} + \cdots \geqslant 1.$$

Puisque la suite $\frac{p_k}{k} - \left[\frac{p_k}{k}\right]$ est dense dans (0, 1) il existe une infinité de k tels que

$$\frac{p_k}{k} - \left[\frac{p_k}{k}\right] \leqslant \frac{1}{2};$$

on aura donc pour ces valeurs de k,

$$\frac{p_{k+1}}{k(k+1)} + \frac{p_{k+2}}{k(k+1)(k+1)} + \cdots \geqslant \frac{1}{2}.$$

Or cette inégalité ne peut avoir lieu pour k suffisamment grand puisque $p_k = o(k^2)$, notre affirmation est ainsi démontrée.

Remarquons que nous avons incidemment démontré la proposition générale suivante:

Soit c_n *une suite d'entiers* > 0 *tels que*

$$n^{-2} c_n \longrightarrow 0 , \quad n \longrightarrow \infty ;$$

toutes les fois que la suite

$$\frac{c_n}{n} - \left[\frac{c_n}{n}\right] \tag{3}$$

ne tend pas vers l'unité, la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!}$$

est irrationnelle.

Ainsi, il suffit d'établir que la suite (3) ne tend pas vers l'unité; or, pour $c_n = p_n$, on peut même montrer que la suite (2) est dense dans (0, 1), mais on est obligé de recourir au théorème des nombres premiers avec l'évaluation suivante du reste [3; pp. 46-51, 193-197, 238-242, 328-333]

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{x}{\log^2 x}\right), \quad x \longrightarrow \infty ;$$

aussi il y aurait intérêt à voir si l'on peut obtenir une démonstration plus élémentaire.

Quant à la démonstration du fait que la suite (2) est dense dans (0, 1) on peut le déduire de la proposition connue [4; p. 17, Aufgaben 100-102]:
la suite

$$a_n - [a_n] , \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

est dense dans (0, 1) si

$$a_n \longrightarrow \infty$$

et

$$a_{n+1} - a_n < o(1) \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow \infty .$$

Pour vérifier cette dernière condition dans le cas où $a_n = \frac{p_n}{n}$, du fait que

$$\frac{p_{n+1}}{n+1} - \frac{p_n}{n} < \frac{p_{n+1} - p_n}{n},$$

il suffit de montrer que

$$p_{n+1} - p_n < o(n), \quad n \to \infty .$$

Or, de

$$1 = \pi(p_{n+1}) - \pi(p_n) = \int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{p_{n+1}}{\log^2 p_{n+1}}\right) + o\left(\frac{p_n}{\log^2 p_n}\right) >$$

$$> \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_{n+1}} + o\left(\frac{p_n}{\log^2 p_n}\right),$$

il résulte

$$p_{n+1} - p_n < \log p_{n+1} + o\left(\frac{p_n \log p_{n+1}}{\log^2 p_n}\right) = o\left(\frac{\log p_n}{p_n}\right),$$

et puisque $p_n \sim n \log n$, $n \to \infty$, l'affirmation en découle.

§ **3.** L'extension mentionnée de la proposition précédente exige une évaluation encore plus précise du reste dans le théorème des nombres premiers et qui est donnée par

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{x}{\log^r x}\right), \tag{4}$$

quel que soit $r > 0$. En outre, contrairement au cas traité au § 2, la démonstration de ce théorème utilise pleinement le fait que les p_n sont premiers.

THÉORÈME. — *Soit* $1 < q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n \leqslant \ldots$ *une suite d'entiers telle que pour un certain* $k > 0$ *on ait*

$$q_n > o\left(\frac{n}{\log^k n}\right), \tag{5}$$

et p_n *la suite des nombres premiers; alors la somme* t *de la série*

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n} \tag{6}$$

est rationnelle si et seulement si

$$q_n = q\, p_n + 1$$

pour un entier q $\geqslant 1$ *fixe et tout* n $\geqslant$ n_0.

DÉMONSTRATION. — Posons

$$t\, q_1\, q_2 \cdots q_{n-1} = N_n + r_n\,, \quad n = 1,2, \cdots,$$

où, d'après (6), les N_n sont des entiers et

$$r_n = \frac{p_n}{q_n} + \frac{p_{n+1}}{q_n\, q_{n+1}} + \cdots .$$

Alors, d'après (5),

$$r_n = \frac{p_n}{q_n} + o\left(\frac{p_n}{q_n}\right), \tag{7}$$

puisque $p_n \sim n \log n$; d'autre part

$$r_{n+1} - r_n < o\,(1)\,, \quad n \longrightarrow \infty\,, \tag{8}$$

par le fait que

$$r_{n+1} - r_n < \frac{p_{n+1} - p_n}{q_n} + \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{q_n\, q_{n+1}} + \cdots,$$

et que, d'après un calcul analogue à celui du paragraphe précédent, la relation (4), avec $r = k + 2$, entraîne

$$p_{n+1} - p_n = o\,(n \log^{-k} n)\,, \quad n \longrightarrow \infty\,. \tag{9}$$

Ceci établi, montrons en premier lieu qu'aucun des points d'accumulation de la suite p_n/q_n ne peut être à valeur irrationnelle. A cet effet, supposons par l'absurde qu'on puisse extraire une suite partielle p_m/q_m, $m = n_i$, $i = 1, 2, \ldots$, qui tende vers un nombre irrationnel α. Dans ce cas, on aurait, d'après (7),

$$t\, q_1\, q_2 \cdots q_{m-1} = N_m + \frac{p_m}{q_m} + o\left(\frac{p_m}{q_m}\right) = N_m + \alpha + o\,(1)\,,$$

ce qui est impossible lorsque t est rationnel.

En second lieu, montrons que la suite p_n/q_n ne peut avoir deux points d'accumulation distincts. En effet, si u et v étaient

deux tels points, puisque d'après (5) et (9),

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \leqslant \frac{p_{n+1} - p_n}{q_n} = o(1) ,$$

il résulterait que tous les points situés entre u et v seraient des points d'accumulation [4; p. 17, Aufgaben 100-102], ce qui est en contradiction avec le fait démontré plus haut.

En troisième lieu, montrons que p_n/q_n tend nécessairement vers une limite finie. A cet effet, supposons par l'absurde que la suite p_n/q_n ne reste pas bornée; n'ayant qu'un seul point d'accumulation, cette suite, et par suite r_n, devrait tendre vers l'infini. Or, d'après (8) et la proposition citée au § 2, la suite $r_n - [r_n]$ serait dense dans (0, 1); il existerait donc une suite d'indices $n_i = m$ telle que

$$r_m - [r_m] \longrightarrow \beta ,$$

avec β irrationnel, et l'on aurait

$$t\, q_1 q_2 \cdots q_{m-1} = N_m + [r_m] + r_m - [r_m] = N_m + [r_m] + \beta + o(1) ,$$

ce qui est impossible pour t rationnel.

Ainsi, on peut poser

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{c}{q} + o(1) , \quad n \longrightarrow \infty ,$$

avec c et q entiers, et tels que $(c, q) = 1$ si $c \geqslant 1$, ou bien q arbitraire $\neq 0$ si $c = 0$, et, d'après (7), on obtient

$$r_n = \frac{c}{q} + o(1) .$$

Par suite,

$$t\, q_1 q_2 \cdots q_{n-1} = N_n + \frac{c}{q} + o(1) ,$$

et cette relation ne peut avoir lieu pour les grandes valeurs de n que si

$$t\, q_1 q_2 \cdots q_{n-1} = N_n + \frac{c}{q} ,$$

pour tout $n \geqslant n_0$. Il s'en suit que, pour $n \geqslant n_0$,

$$r_n = \frac{c}{q} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{c}{qq_n} + o\left(\frac{1}{q_n}\right),$$

d'où

$$c\,q_n = q\,p_n + c + o\,(1)\,.$$

Or cette relation ne pouvant avoir lieu non plus que si

$$c\,q_n = q\,p_n + c$$

à partir d'un certain n, il en découle que $c \geqslant 1$, et, puisque $(c, q) = 1$ et p_n est premier, il faut que $c = 1$; on a donc

$$q_n = q\,p_n + 1$$

pour un $q \geqslant 1$ fixe et à partir d'un n suffisamment grand.

C.q.f.d.

Je remarquerai enfin que la borne inférieure de la croissance des q_n, donnée par (5), n'est pas la plus précise possible et qu'elle dépend de l'évaluation du reste du théorème des nombres premiers. D'après Tatuzawa [5], le résultat le plus précis connu jusqu'à présent est

$$\pi\,(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{x}{\varphi\,(x)}\right),$$

avec

$$\varphi\,(x) = \exp\left(-\,a\,(\log x)^{\frac{4}{7}}\,(\log\log x)^{-\frac{3}{7}}\right)$$

et où a est une constante positive, ce qui permet de remplacer (5) par

$$q_n > O\left(n \log^2 n / \varphi\,(n)\right).$$

Toutefois, il est fort probable que le théorème reste vrai sous l'unique hypothèse

$$1 < q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots;$$

mais, déjà, le cas où $q_n = 2$, $n = 1, 2, \ldots$, m'échappe entièrement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Cantor, Ueber die einfachen Zahlensysteme. *Zeitschr. für Math. u. Phys.*, *14*, pp. 121-128 (1869) et *Gesammelte Abhand.*, Berlin, 1932, pp. 35-42.

[2] P. Erdös, On the irrationality of certain series. *Indag. Math.*, **19**, pp. 212-219 (1957).

[3] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (B. G. Teubner, Leipzig, 1909).

[4] G. Polya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1954)).

[5] T. Tatuzawa, On the number of the primes in an arithmetic progression. *Jap. Journ. of Math.*, **21**, pp. 93-111 (1951).