

1. THE DEFINITION OF NORM

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THE NORM OF A REAL LINEAR TRANSFORMATION IN MINKOWSKI SPACE

by Angus E. TAYLOR, Los Angeles

(*Reçu le 27 février 1958*)

1. THE DEFINITION OF NORM

By the Minkowski space $l^p(n)$ we mean the space of vectors $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ with the norm of x defined by

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |\xi_i|^p \right)^{1/p}.$$

Here it is supposed that $p \geq 1$, so that $\|x\|_p$ is a norm on $l^p(n)$.

If $l^p(n)$ and $l^q(m)$ are Minkowski spaces of dimensions n and m , respectively, a linear transformation A of $l^p(n)$ into $l^q(m)$ is determined by a matrix (a_{jk}) of constants ($j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$); if A transforms x into $y = (\eta_1, \dots, \eta_m)$, the η 's are given in terms of the ξ 's by the equations

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k \quad j = 1, \dots, m.$$

If we write $y = Ax$, the norm of A is defined as

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p} = \max_{x \neq 0} \frac{\left(\sum_j \left| \sum_k a_{jk} \xi_k \right|^q \right)^{1/q}}{\left(\sum_k |\xi_k|^p \right)^{1/p}}.$$

We may consider all of these things with respect to the complex field, letting the vector components ξ_1, \dots, ξ_n and the

matrix elements a_{jk} be complex numbers. In this case we call $l^p(n)$ a *complex* Minkowski space and A a *complex* linear transformation. But we may equally well confine our attention to real scalars, in which case the space and the transformation are called *real*.

Now, if A is a transformation determined by a matrix of real elements a_{jk} , the transformation can be considered either as a real transformation or as a complex transformation, and accordingly there are two possible definitions of its norm. If in (1) we allow x to vary over all nonzero elements of the complex space $l^p(n)$, we get the norm of A as a complex transformation, whereas if we restrict the vector x to have real components, we get the norm of A as a real transformation. Let us denote these two norms by

$$\|A\|_c \quad \text{and} \quad \|A\|_r.$$

2. THE THEOREM

We shall prove the following result:

THEOREM *Let A be a transformation of $l^p(n)$ into $l^q(m)$ determined by a matrix (a_{jk}) of real constants. Suppose $q \geq p \geq 1$. Then*

$$\|A\|_c = \|A\|_r. \quad (2)$$

Proof. We first observe that when p is fixed and q varies subject to $q \geq p$, $\|A\|$ is a continuous function of q at $q = p$, regardless of whether we have a real or a complex transformation. For, let the dependence on q be exhibited by writing $\|A\| = M(q)$. It is well known that $\|y\|_q$ does not decrease as q decreases. Hence $p < q$ implies

$$\frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p} \leqq \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p},$$

whence also $M(q) \leqq M(p)$. Now suppose that x is chosen ($x \neq 0$) so that

$$\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = M(p).$$