2. Von der Bogengleichheit.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Soll das orthogonal verbundene Quadrupel aus den Längen der Pfeile bestimmt werden, dann entsteht eine kubische Gleichung für den Durchmesser des Kreises, in den der Streckenzug eingepaßt werden kann [4]. Diese Gleichung hat drei reelle Lösungen; die Anordnung der (in ihrer Reihenfolge vertauschbaren) Pfeile in diesen Kreisen wird genau durch die drei Arten der Abb. 4 veranschaulicht [5].

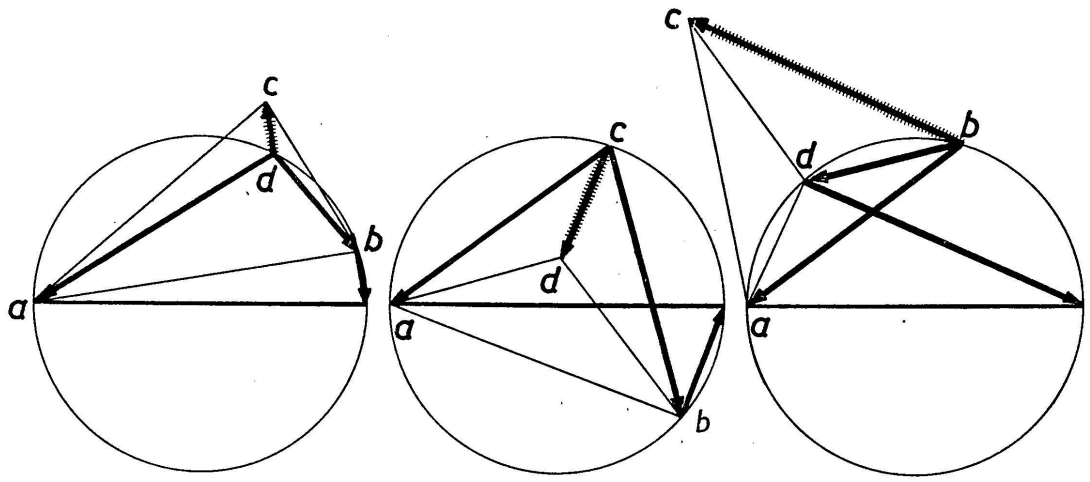

Abb. 4.
Der Holzsche Satz.

2. Von der Bogengleichheit.

(2, 1) Sind (a, b) und (c, d) zwei Parallelsehnen im Einheitskreis (Abb. 5), dann sind die Kreisbögen zwischen den Parallelen gleich groß. Prägen wir ihnen den positiven Gegenuhrzeigersinn

---

[4]) Das Einpassungsproblem wird heute allgemein nach I. Newton, *Arithmetica universalis*, Kap. XIII, 8./10. Vorlesung von 1675/76, ed. W. Whiston, Cambridge 1707, 97/113 gennant, so z.B. bei H. Dörrie, *Mathematische Miniaturen*, Breslau 1943, 31. Es stammt jedoch nicht von Newton, sondern von Fr. van Schooten, *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus..., cui subnexa est appendix de cubicarum aequationum resolutione*, Leiden 1646, 102/08 und 111/17, in verbesserter Form wiederabgedruckt in R. Descartes, *Geometrie* ed. Fr. van Schooten, I, Amsterdam 1659, 354/59 und 361/67. Dies wird die Vorlage für Newton gewesen sein, der diese Ausgabe der *Geometria* besaß.

Setzen wir z.B. $|b, c| = u$, $|c, a| = v$, $|a, b| = w$, dann heißt die (bereits bei Schooten auftretende) kubische Gleichung

$$x^3 = (u^2 + v^2 + w^2)\,x + 2uvw\,.$$

[5]) Diese drei Fälle treten auch bei Schooten [4]) und Newton [4]) auf. Auch die elegante kinematische Lösung bei Bieberbach [3]), 115/16 vermittels eines transparenten Blattes und des Stechzirkels erweist sich bei genauerem Zusehen als Variante der Lösung von Schooten. Dieser arbeitet im Anschluß an Fr. Viète, *Supplementum geometriae*, Tours 1593, Wiederdruck in den *Opera*, ed. Fr. van Schooten, Leiden 1646, vermittels einer Einschiebung, die mit der Winkeldreiteilung zusammenhängt.

auf, dann ist gemäß den in der Abbildung gewählten Bezeichnungen $\frac{c}{b} = \frac{a}{d}$; also

$$\boxed{ab = cd}\,.$$

Fällen wir z.B. das Lot aus c auf (a, b), dann trifft es in $-d = -\frac{ab}{c}$ auf dem Kreis ein.

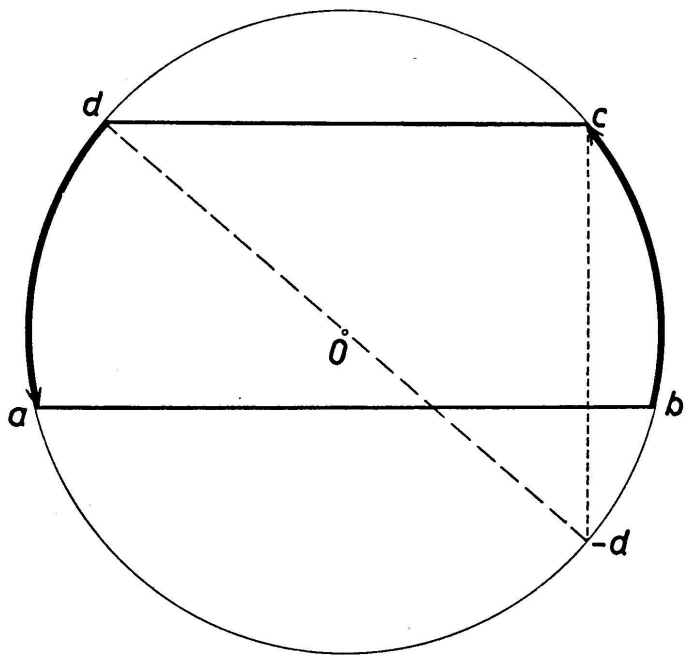

Abb. 5.
Bogengleichheit.

(2, 2) Haben wir nunmehr die Punkte a, b, c auf dem Umfang des Einheitskreises (Abb. 6), dann wird der Kreis von den Höhen des Dreiecks (a, b, c) bezw. in den Punkten $p = -\frac{bc}{a}$, $q = -\frac{ca}{b}$, $r = -\frac{ab}{c}$ geschnitten. Nun ist aber z.B. $\frac{c}{p} = -\frac{a}{b} = \frac{q}{c}$. Daraus folgt, daß der Pfeil (r, c) die innere Halbierende des Winkels (p, r, q) ist.

Also sind die Höhen des Sehnendreiecks (a, b, c), *die inneren Winkelhalbierenden des zugeordneten Gegendreiecks* (p, q, r) *und der Höhenschnittpunkt des Ausgangsdreiecks ist zugleich der Inkreismittelpunkt des neuen* [6].

---

[6]) Vgl. Ph. NAUDÉ in den *Miscellanea Berolinensia 5*, 1737, 17 bzw. FEUERBACH [1]), § 24.

Weiterhin ist w (vgl. 1, 2) Mittelpunkt zwischen d und r; also $w = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{ab}{c}\right)$ usw. und $d - w = \frac{(a + c)\,(b + d)}{2c}$ usw.

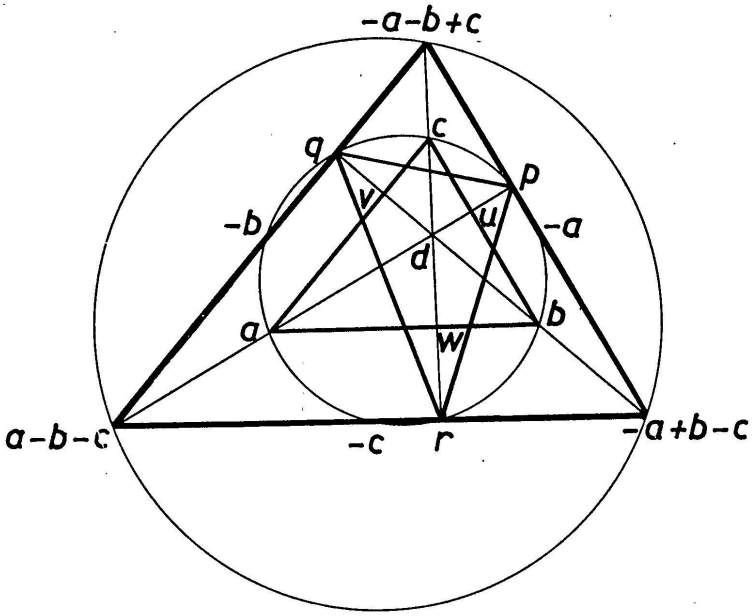

Abb. 6.
Dreieck und Gegendreieck.

(2, 3) Jetzt ergänzen wir noch die Gegenpunkte $(-a)$, $(-b)$, $(-c)$ zu a, b, c. bez. O. Dann ist z.B. die Gerade $(-c, r)$ die äußere Halbierende des Winkels (p, r, q). Fügen wir auch die anderen äußeren Winkelhalbierenden $(-a, p)$, $(-b, q)$ des Dreiecks (p, q, r) hinzu, dann entsteht ein Dreieck, das zum Dreieck (a, b, c) aus d ähnlich und im Maßstab 2: 1 vergrößert ist. Jetzt tritt z.B. an Stelle von c die Ecke $(-a - b + c)$; denn c ist Mittelpunkt zwischen $(-a - b + c)$ und d. Der Ausgangskreis ist der FEUERBACH-Kreis dieses vergrößerten Dreiecks, dessen Umkreis den Halbmesser 2 hat. Damit sind wir in etwas anderer Form zu den früheren Ergebnissen zurückgekommen.

Wir können die Ergebnisse auch bruchfrei ausdrücken, indem wir nämlich p durch p^2, q durch q^2 und r durch r^2 ersetzen. Dann müssen wir a durch $-qr$, b durch $-rp$ und c durch $-pq$ ersetzen und erhalten den Inkreismittelpunkt in der Form $-(qr + rp + pq)$, die Ankreismittelpunkte in der Form $(-qr + rp + pq)$, $(qr - rp + pq)$, $(qr + rp - pq)$.