Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES

Autor: Valiron, Georges

Kapitel: IV. Caractéristique de Shimizu-Ahlfors. Fonction L (r).

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34637

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Si $|h| < |g|$ le $\log^+$ dans $m(r, \infty)$ est nul; si $|h| > |g|$ le $\log^+$ est égal à $\log\left|\frac{h}{g}\right| = \log|h| - \log|g|$. Par suite, on a

$$T(r, f) = \log|c_q| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \lambda(re^{i\varphi})\, d\varphi ,$$

$\lambda(z)$ étant le plus grand des deux nombres $|h(z)|$ et $|g(z)|$.

IV. Caractéristique de Shimizu-Ahlfors. Fonction L (r).

47. *Aire couverte par les valeurs de* f (z).

Considérons la fonction $Z = f(z)$ méromorphe pour $|z| \leqslant r$ et représentons les points Z sur la sphère de diamètre 1 déjà envisagée au n° 42. Lorsque z parcourt le cercle $|z| \leqslant r$, le point Z décrit une surface de Riemann transposée sur la sphère, c'est en général une surface à plusieurs feuillets. Nous appellerons $\pi S(r)$ l'aire totale de ces feuillets. On a vu que, à l'élément d'aire $dX\, dY$ du plan des X, Y ($Z = X + iY$) correspond sur la sphère un élément d'aire

$$d\omega = \frac{dX\, dY}{(1 + |Z|^2)^2} .$$

D'autre part, à l'élément d'aire $tdtd\varphi$ du point $te^{i\varphi}$ du plan z, la fonction $Z = f(z)$ fait correspondre l'élément d'aire

$$dX\, dY = |f'(z)|^2\, t\, dt\, d\varphi .$$

On a donc, sur la sphère,

$$d\omega = \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}\, td\, td\varphi$$

et

$$\pi S(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(te^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(te^{i\varphi})|^2)^2}\, t\, dt\, d\varphi . \qquad (1)$$

Le second membre peut s'écrire autrement; $n(r, Z)$ est le nombre des feuillets de la surface de Riemann sphérique qui recouvrent

l'image de Z. On a donc aussi

$$\pi S(r) = \int\int_{\Sigma} n(r, Z)\, d\omega_Z \tag{2}$$

$d\omega_Z$ étant l'élément d'aire de la sphère Σ au point image de Z. En remplaçant r par $t \leqslant r$, divisant par t et intégrant de 0 à r, on obtient

$$\int_0^r \frac{S(t)}{t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int\int_{\Sigma} N(r, Z)\, d\omega_Z$$

et d'après le théorème de Shimizu du n° 42, cette quantité est égale à la fonction $T(r, f)$ à une constante additive près qui est bornée quel que soit r. Il est donc loisible de prendre comme fonction caractéristique, à la place de $T(r, f)$ la fonction

$$\int_0^r \frac{S(t)}{t}\, dt$$

dont la dérivée donnée par (1) ou (2) a une interprétation géométrique simple. C'est ce qui avait été proposé par Bloch et a été utilisé systématiquement par Shimizu et Ahlfors [43].

48. *Fonction* L (r).

Lorsque le point z décrit la circonférence $|z| = r$, l'image sphérique de $Z = f(z)$ décrit une courbe $\Gamma = \Gamma_r$, qui est la frontière de la surface de Riemann décrite par Z et dont l'aire est $\pi S(r)$. Ahlfors a introduit, à côté de la fonction $S(r)$, la longueur $L(r)$ de cette courbe Γ_r. A l'élément d'arc $r d\varphi$ de la circonférence C_r, $|z| = r$, la transformation $Z = f(z)$ fait correspondre l'élément $|f'(re^{i\varphi})|\, r d\varphi$ et l'on a sur la sphère un élément

$$\frac{|f'(re^{i\varphi})|\, r d\varphi}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2}.$$

Par conséquent,

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|\, r d\varphi}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2}. \tag{3}$$

49. *Inégalité fondamentale.*

D'après l'égalité (1), on a

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(re^{i\varphi})|^2)^2} r d\varphi \tag{4}$$

et, en appliquant l'inégalité de Schwarz à l'intégrale (3), et tenant compte de (4)

$$L(r)^2 \leqslant \pi \frac{dS}{dr} 2\pi r .$$

Ainsi

$$L(r)^2 \leqslant 2\pi^2 r \frac{dS}{dr} . \tag{5}$$

On déduit de cette inégalité que, si le point à l'infini est point essentiel, L (r) est en général infiniment petit par rapport à S (r). Car, admettant toujours, comme au n° 43, le théorème de Picard, T (r, f)/logr n'est pas borné, donc S (r) n'est pas bornée. Si S (r) n'est pas borné, et si l'on suppose que dans certains intervalles, pour lesquels $r > r_0$, on a

$$L(r) > S(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} , \qquad \varepsilon > 0 ,$$

on a, dans ces intervalles, d,

$$\frac{dr}{r} \leqslant 2\pi^2 \frac{dS}{S^{1+2\varepsilon}} ,$$

$$\int_d \frac{dr}{r} \leqslant \frac{2\pi^2}{2\varepsilon S(r_0)^{2\varepsilon}}$$

la variation totale de logr dans ces intervalles est finie. Ainsi, à l'extérieur d'intervalles dans lesquels la variation totale de logr est finie, on a

$$L(r) < S(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} , \qquad \varepsilon > 0 .$$

(A suivre).