Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DER JORDANSCHE POLYGONSATZ IN DER AFFINEN GEOMETRIE
Autor: Lamotke, Klaus
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34638

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DER JORDANSCHE POLYGONSATZ IN DER AFFINEN GEOMETRIE

von Klaus LAMOTKE, Essen

(Reçu le 26 mars 1958)

In seiner Besprechung der 8. Auflage von David Hilberts Grundlagen der Geometrie (Teubner, 1956) bemerkt H. Freudenthal, dass zu Hilberts Satz 9, wonach ein einfaches Polygon die Ebene in zwei Gebiete zerlegt, auch in der 8. Auflage kein Beweis gegeben wird [1]). Freudenthal verweist auf den wohl nicht jedermann zugänglichen Beweis von B. L. van der Waerden: „De logische grondslagen der euklidische meetkunde" in „Christiaan Huygens", 13. jaargang Nr. II, Groningen, 1934/35. Es mag daher erwünscht sein, eine erneute Darstellung dieses Beweises zu geben, wobei der von van der Waerden im zweiten Teil angedeutete Beweis in Verbindung mit einer neueren Arbeit von W. Graeub vollständig ausgeführt wird.

Der *Jordansche Polygonsatz* lautet: Ein einfaches Polygon zerlegt die Ebene in zwei Gebiete. Stetigkeit, Parallelenaxiom, der Satz von Desargues und die Kongruenz werden nicht vorausgesetzt, sondern nur die folgenden sieben Axiome; in der Numerierung von Hilbert:

I 1, 2: Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

I 3: Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei verschiedene Punkte.

I 4: Es gibt mindestens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

---

1) Siehe H. FREUDENTHAL, Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3), *5*, (1957), 105-142.

Axiome der Anordnung:

A, B und C bezeichnen Punkte.

II 1: Wenn B zwischen A und C liegt, sind A, B und C drei verschiedene Punkte einer Geraden.

II 2: Zu zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es mindestens einen Punkt C, so dass B zwischen A und C liegt.

II 3: Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden andern liegt.

II 4: (Axiom von Pasch): Die drei Eckpunkte eines Dreiecks A, B und C sollen nicht in einer Geraden liegen. Die Gerade g möge eine Seite des Dreiecks schneiden, d.h. durch einen Punkt zwischen zwei Eckpunkten gehen, aber sie soll durch keinen Eckpunkt führen. Dann schneidet g mindestens eine weitere Seite des Dreiecks.

Zu II 2: Mit dem Axiom von Pasch lässt sich zeigen, dass es dann auch einen Punkt D zwischen A und B gibt.

Zu II 3: Ebenso ergibt sich, dass auch wirklich ein Punkt zwischen den beiden andern liegt.

Zu II 4: Es kann bewiesen werden, dass g auch höchstens eine weitere Dreiecksseite schneidet [1]).

Im folgenden werden einfache, geometrische Figuren eingeführt und einige Sätze über sie angegeben, die später benutzt werden.

Eine *Strecke* $\overline{AB}$ besteht aus allen Punkten zwischen A und B einschliesslich der Endpunkte A und B.

Strahl: Ein Punkt O auf einer Geraden teilt alle ihre Punkte ausser O in zwei Klassen, Strahlen genannt. Zwischen zwei Punkten verschiedener Strahlen liegt stets O. Zwischen zwei Punkten desselben Strahls liegen nur Punkte dieses Strahls.

---

1) Siehe C. R. Wylie, *Amer. Math. Monthly*, 51 (1944), p. 371, wo auch gezeigt wird, dass B zwischen C und A liegt, wenn B zwischen A und C liegt.

Jeder der beiden Strahlen kann durch irgend einen seiner Punkte repräsentiert werden, etwa einer durch A. Man sagt dann: Strahl $\overrightarrow{OA}$.

Halbebene: Eine Gerade g teilt alle Punkte der Ebene ausser denen auf g in zwei Klassen, Halbebenen genannt. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte verschiedener Halbebenen schneidet g. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte derselben Halbebene enthält auch nur Punkte dieser Halbebene. Man sagt: Die Halbebene ist *konvex*. Jede Halbebene kann durch irgend einen ihrer Punkte repräsentiert werden.

Dreieck: Die Eckpunkte A, B und C liegen nicht in einer Geraden. Ein Punkt liegt im Innern des Dreiecks, wenn er auf derselben Seite (= Halbebene) der Geraden AB wie C, der Geraden BC wie A und der Geraden CA wie B liegt. Die Strecken AB, BC und CA bilden den Rand des Dreiecks. Das ganze Dreieck besteht aus den Punkten des Innern und des Randes. Es ist konvex.

Winkel: Zwei Strahlen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ mit demselben Endpunkt O aber nicht in einer Geraden bilden den Winkel AOB ($\sphericalangle$ AOB). $\sphericalangle$ BOA ist dasselbe. Ein Punkt liegt innerhalb $\sphericalangle$ AOB, wenn er auf derselben Seite von $\overrightarrow{OA}$ wie B und von $\overrightarrow{OB}$ wie A liegt.

Satz 1: Gegeben sei ein Winkel AOB. Jede Gerade OC, wobei C innerhalb $\sphericalangle$ AOB liegt, teilt Inneres und Aeusseres von $\sphericalangle$ AOB in das Innere je zweier Teilwinkel, deren Schenkel die Strahlen $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, bzw. $\overrightarrow{OB}$, der andere Strahl der Geraden OC und $\overrightarrow{OA}$ sind.

Ein Streckenzug von A_1 nach A_n besteht aus den n Eckpunkten $A_1, A_2 \ldots A_n$, den Seiten $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2, A_3}$, ... $\overline{A_{n-1} A_n}$, die je aufeinanderfolgende Ecken verbinden.

Ein *Polygon* ist ein geschlossener Streckenzug. Er enthält zusätzlich die Seite $\overline{A_n A_1}$. Das *Polygon* ist *einfach*, wenn verschiedene Seiten keinen Punkt gemeinsam haben ausser $\overline{A_{i-1} A_i}$ und $\overline{A_i A_{i+1}}$ den Punkt A_i.

Satz 2: Jedes Polygon teilt die Ebene in zwei Teile, Inneres und Aeusseres des Polygons genannt. Dabei gilt:

a) Jeder Punkt, der nicht auf dem Polygon liegt, gehört entweder zum einen oder zum anderen Teil;

b) Es ist unmöglich, einen Punkt des Innern mit einem Punkt des Äussern durch einen Streckenzug zu verbinden, ohne das Polygon zu schneiden;

c) Die Endpunkte einer Strecke, die eine Seite des Polygons schneidet und sonst keinen Punkt mit ihm gemeinsam hat, liegen in verschiedenen Teilen.

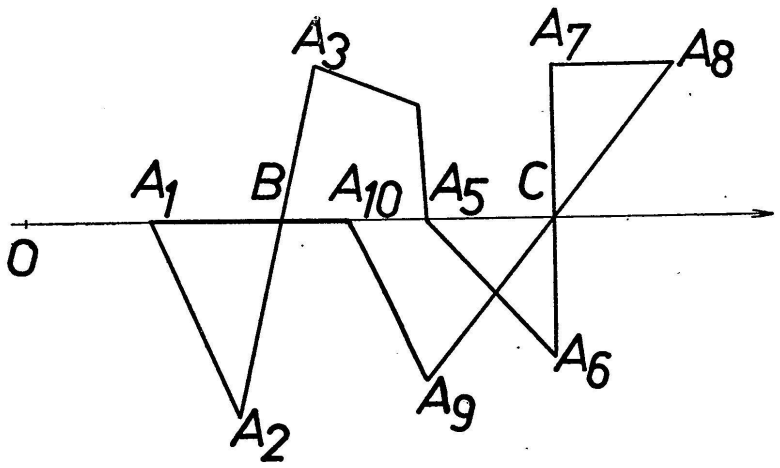

Abb.1

Beweis: Es wird definiert, wann ein Strahl $\vec{h}$, dessen Endpunkt O nicht auf dem Polygon liegt, dieses schneidet. In folgenden Situationen liegt jeweils ein Schnitt vor:

1) $\vec{h}$ geht durch einen inneren Punkt einer Polygonseite und hat sonst keinen Punkt mit ihr gemeinsam;

2) $\vec{h}$ geht durch eine Ecke A_i, und die angrenzenden Seiten $\overline{A_{i-1} A_i}$ und $\overline{A_i A_{i+1}}$ liegen auf verschiedenen Seiten von $\vec{h}$;

3) Eine oder mehrere aufeinanderfolgende Seiten des Polygons liegen auf $\vec{h}$, und die angrenzenden Seiten liegen auf verschiedenen Seiten von $\vec{h}$.

In allen anderen Fällen liegt kein Schnitt vor.

In der Abbildung 1 findet in B ein Schnitt mit $\overline{A_2 A_3}$ statt. Längs $\overline{A_{10} A_1}$ ist kein Schnitt. In A_5 ist ein Schnitt. In C sind zwei Schnitte mit $\overline{A_6 A_7}$ und $\overline{A_8 A_9}$.

Nun soll gezeigt werden: Bilden die Strahlen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ einen Winkel, so ist die Summe der Schnittzahlen beider Schenkel gerade. Man kann die Seiten des Polygons in Stücke teilen, deren jedes mit höchstens einem Schenkel einen Punkt gemeinsam hat. Die Endpunkte der Stücke, das sind die alten Eckpunkte und die neuen Teilpunkte seien $D_1, D_2, \ldots, D_m$ genannt, in der Reihenfolge, wie sie auf dem Polygon liegen. Jedem Punkt D_i wird die Zahl g_i mit den Werten 0 oder 1 zugeordnet, je nach dem ob D_i innerhalb oder ausserhalb des Winkels liegt. Liegt D_i auf einem Schenkel, so wird $g_i = g_{i-1}$ gesetzt. Es ist

$$(g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + (g_m - g_{m-1}) + (g_1 - g_m) = 0 . \tag{1}$$

Die Differenz $g_{i+1} - g_i$ ist $= \pm 1$, wenn in oben definiertem Sinne ein Schnitt mit einem Schenkel zwischen D_i und D_{i+1} oder in D_i oder längs $\overline{D_{i-1} D_i}$ vorkommt. In allen anderen Fällen ist $g_{i+1} - g_i = 0$. Somit entspricht jedem Schnitt eineindeutig eine Differenz $g_{i+1} - g_i = \pm 1$. Wegen (1) ist dann die Anzahl der Schnitte gerade, da gleich viel Differenzen $+1$ und -1 vorkommen müssen.

Es wird nun definiert: O liegt im Innern des Polygons, wenn ein Strahl $\overrightarrow{OA}$ das Polygon in einer ungeraden Anzahl schneidet; O liegt im Aeussern, wenn die Schnittzahl gerade ist. Nach dem oben Bewiesenen ist diese Definition von der Wahl des Strahls unabhängig. Damit ist Teil *a)* von Satz 2 bewiesen.

Die Strecke $\overline{AB}$ möge zwei Punkte verbinden, die nicht auf dem Polygon liegen. A und B gehören zum selben Teil des Polygons, wenn die Schnittzahl von $\overline{AB}$ mit dem Polygon gerade und zu verschiedenen Teilen, wenn sie ungerade ist. Das sieht man, indem man den Strahl $\overrightarrow{ABC}$ und den Strahl $\overrightarrow{BC}$ betrachtet. Die Differenz der Schnittpunkte beider Strahlen mit dem Polygon ist die der Strecke $\overline{AB}$. Insbesondere gehören A und B zu demselben Teil, wenn die Strecke $\overline{AB}$ das Polygon überhaupt nicht schneidet. Daraus folgt: Sämtliche Punkte eines Streckenzuges, der das Polygon nicht trifft, liegen in demselben Teil, womit Satz 2 *b)* bewiesen ist. Schliesslich gehören A und B zu verschie-

denen Teilen, wenn die Strecke $\overline{AB}$ das Polygon in genau einem Punkte schneidet, was in *c)* behauptet wurde.

Inneres und Aeusseres eines Polygons können aus mehreren Teilgebieten bestehen, so in der Abbildung 2: Das schraffierte Innere und das unschraffierte Aeussere zerfallen je in zwei Teilgebiete.

Im folgenden wird nur von Teilgebieten des Innern gesprochen, aber es lässt sich alles wörtlich auf Teilgebiete des Aeusseren übertragen.

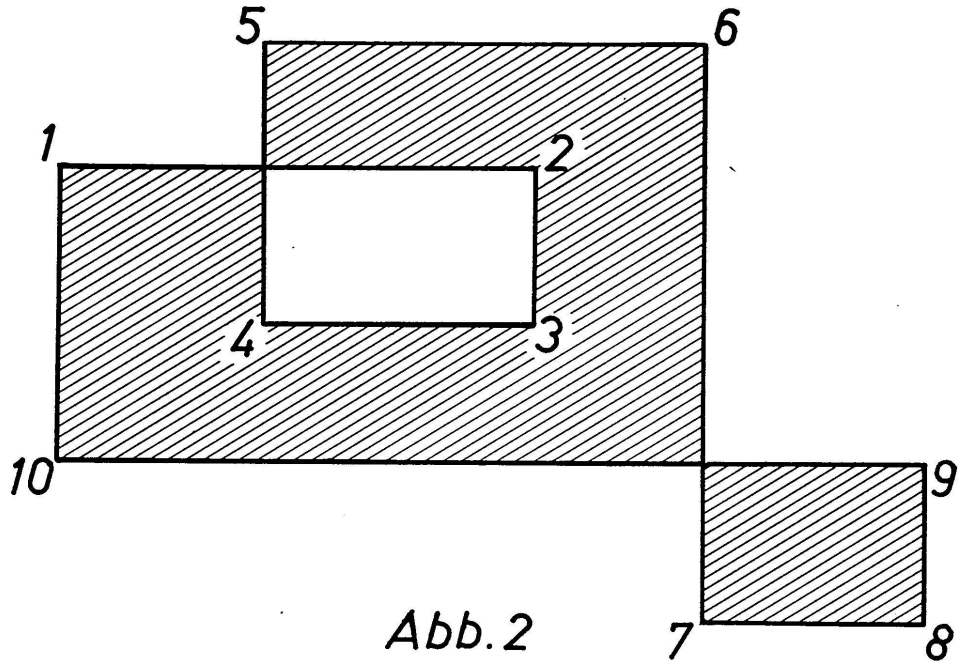

Abb. 2

Ein *Teilgebiet* des Innern besteht aus allen Punkten, die sich mit einem Punkte des Teilgebietes durch einen Streckenzug verbinden lassen, ohne dass dabei das Polygon getroffen wird. Ein Teilgebiet ist also *zusammenhängend*, was im Worte „Gebiet" ausgedrückt wird.

Der *Rand* eines Teilgebietes besteht aus allen Punkten, die selbst nicht zum Gebiet gehören aber als Endpunkte von Strecken auftreten können, die sonst ganz im Gebiet liegen. Die Randpunkte können weder zum Aeussern noch zum Innern des Polygons gehören. Denn sonst müsste die Verbindungsstrecke jedes Punktes des Teilgebietes mit einem Randpunkt das Polygon in einer geraden oder ungeraden Anzahl schneiden. Beides ist nicht möglich. Also liegt der Rand eines Teilgebietes auf dem Polygon.

Satz 3: Der Rand eines Teilgebietes ist selbst ein Polygon, dessen Seiten auf dem ursprünglichen liegen.

Der zweite Teil des Satzes wurde gerade gezeigt. Der längere Beweis des ersten Teils wird zunächst zurückgestellt.

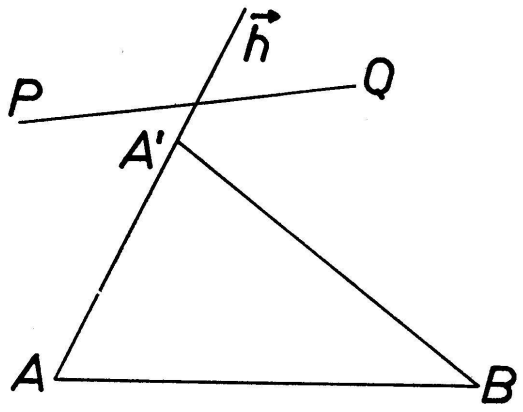

Abb. 3

Enthält das ursprüngliche Polygon keine mehrfach durchlaufenen Seiten, so lässt sich jeder Punkt O des ursprünglichen Polygons mit einem Punkt P des Innern verbinden durch eine Strecke, die sonst keinen Punkt mit dem Polygon gemeinsam hat. Das folgt aus Satz 2 c). Die Strecke liegt daher bis auf ihren einen Endpunkt ganz in demselben Teilgebiet des Innern wie P. O ist Randpunkt dieses Teilgebietes. Da O ein beliebiger Punkt des ursprünglichen Polygons war, gilt also: Das ursprüngliche Polygon zerfällt in Teilpolygone, deren jedes ein Teilgebiet des Innern berandet. Da keine mehrfach durchlaufenen Seiten auftreten, haben die Teilpolygone nur Ecken gemeinsam.

Ist das ursprüngliche Polygon *einfach*, dann kann es nicht aus Teilpolygonen bestehen, die Ecken miteinander gemeinsam haben. Andererseits dürfen die Teilpolygone auch nicht vollkommen fremd zueinander sein. So ist das ursprüngliche Polygon selbst das einzig auftretende Teilpolygon und berandet das Innere, welches aus *einem* Teil*gebiet* besteht. Dasselbe gilt für das Auessere. Damit ist der Jordansche Polygonsatz bewiesen. Nun zu *Satz 3:*

Ein *Hilfssatz* (entnommen aus W. Graeub: Der Jordansche Kurvensatz in der affinen Geometrie, *Annales Akademiae Scientiarum Fennicae*, A I, 181, Helsinki, 1955. Siehe dort auch den

Beweis.): Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Strahl $\vec{h}$ von A aus, der mit $\overline{AB}$ nicht in einer Geraden liegt. Abb. 3. Ferner sei $\overline{PQ}$ eine zu $\overline{AB}$ punktfremde Strecke. Dann gibt es auf $\vec{h}$ einen Punkt A′, so dass das Dreieck ABA′ zu $\overline{PQ}$ punktfremd ist.

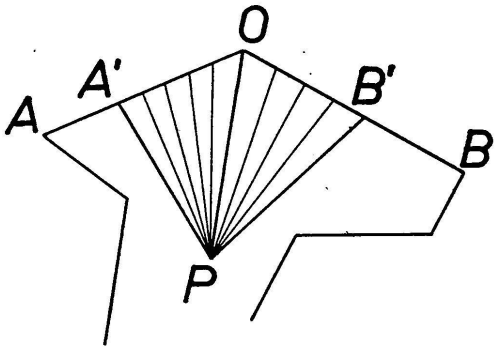

Abb. 4

Erweiterungen des Hilfssatzes: $\overline{PQ}$ darf durch A gehen, falls die Strecke nicht in das Innere des Winkels $BA\vec{h}$ fällt. Es darf sich auch um eine endliche Anzahl solcher Strecken $\overline{P_i Q_i}$ handeln. Von allen Punkten A_i' auf $\vec{h}$ bildet dann der, der am nächsten bei A liegt mit A und B das gewünschte Dreieck.

Beweis des Satzes 3: Es sei O ein Randpunkt des Teilgebietes G. Es gibt zwei oder mehr von O ausgehende Strecken, die auf dem ursprünglichen Polygon liegen. Es soll gezeigt werden: Es gibt wenigstens zwei von O ausgehende Strecken — sie brauchen nur Teile der vorhin genannten Strecken zu sein —, die nur Randpunkte enthalten.

Die von O ausgehenden Strecken bestimmen Strahlen, die miteinander Winkel bilden. P sei ein Punkt von G, der sich mit O durch eine Strecke verbinden lässt, die bis auf O ganz in G liegt. P wird das Innere oder Aeussere des Winkels AOB zugeordnet, in dem P selbst liegt aber keine von O ausgehende Strecke. Kurz gesagt: Es wird P das kleinste Innere oder Aeussere eines Winkels zugeordnet, in dem P liegt.

Es werden *zwei Fälle* unterschieden:

I. Der Strahl $\overrightarrow{OP}$ teilt das Innere oder Aeussere des Winkels AOB, in dem P liegt, in das Innere zweier Winkel AOP und BOP. (Abb. 4.)

Auf die Strecke $\overline{OP}$, Strahl $\overrightarrow{OA}$ und die Polygonseiten ausser $\overline{OA}$ als $\overline{P_i Q_i}$ wird der Hilfssatz in seiner erweiterten Form angewandt: Auf $\overrightarrow{OA}$ und erst recht auf $\overline{OA}$ gibt es einen Punkt A′, so dass das Dreieck OPA′ bis auf die Seite $\overline{OA'}$ zum ganzen Polygon fremd ist. Da ein Dreieck konvex ist, sind auch die Verbindungsstrecken von P zu Punkten von $\overline{OA'}$ zum Polygon fremd. Da P im Gebiet G liegt, gehören dann alle Punkte von $\overline{OA'}$ zum Rand von G gemäss dessen Definition. Ebenso findet man auf $\overline{OB}$ ein B′, so dass $\overline{OB'}$ zum Rand von G gehört.

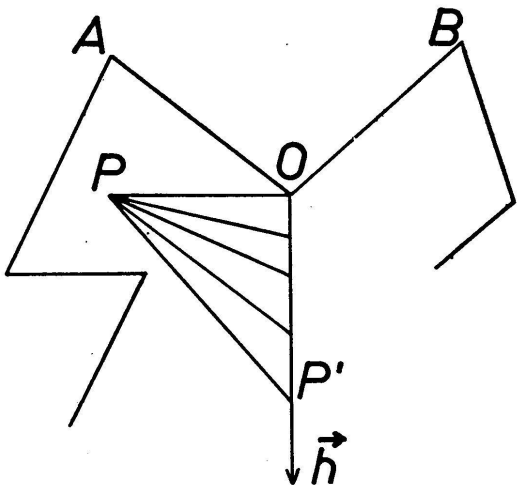

Abb. 5

II. *Fall:* Der Strahl OP teilt das Aeussere des Winkels AOB, in dem P liegt, nicht in das Innere zweier Winkel. Läge P im Innern von $\sphericalangle$ AOB, so läge nach Satz 1 immer der I. Fall vor. Es ist nun ein Punkt P′ zu finden mit denselben Eigenschaften wie P und der ausserdem die Voraussetzung des I. Falles erfüllt. Dazu wird gemäss Satz 1 ein Strahl $\vec{h}$ von O aus in das Aeussere des Winkels $\sphericalangle$ AOB gelegt, der dieses in das Innere der Winkel AO$\vec{h}$ und BO$\vec{h}$ zerlegt. Auf die Strecke $\overline{PO}$, den Strahl $\vec{h}$ und alle Seiten des Polygons als $\overline{P_i Q_i}$ wendet man den Hilfssatz an und findet auf $\vec{h}$ ein P′, so dass die Verbindungsstrecken von P nach Punkten auf $\overline{OP'}$

zum Polygon fremd sind. $\overline{OP'}$ selbst liegt ausser O auch nicht darauf. Also gehört $\overline{OP'}$ bis auf O zum Teilgebiet G. Man fährt nun wie im ersten Falle weiter.

Damit ist gezeigt: Der Rand von G besteht aus Strecken, die auf dem ursprünglichen Polygon liegen. Diese Strecken bilden selbst ein geschlossenes Teilpolygon, weil sich an jeden Endpunkt einer Strecke wenigstens eine weitere anschliesst. Satz 3 ist bewiesen.

SU UN ESEMPIO DI FUNZIONE CONTINUA SENZA DERIVATA [1])

da Luciano DE VITO, Roma

(Reçu le 22 avril 1958)

..... Nel Suo articolo: « Sur un exemple de fonction continue sans dérivée », apparso su *L'enseignement mathématique*, tomo III, fascicolo 1, gennaio-marzo 1957, Ella dimostra che la funzione:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left| 2^k x - \left[2^k x + \frac{1}{2} \right] \right| ,$$

ove $[y]$ è il più grande intero che non supera y, è continua e mai derivabile sull'asse x.

Credo sia di qualche interesse notare che la funzione $f(x)$ dell'elegante esempio da Lei portato non soltanto è continua, ma è anche uniformemente hölderiana con qualsiasi esponente di Hölder α, tale che $0 < \alpha < 1$. Si ha precisamente, per ogni coppia di punti x_1 e x_2 dell'asse reale:

$$| f(x_2) - f(x_1) | \leqslant \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}} | x_2 - x_1 |^{\alpha} .$$

[1]) Da una lettera al Prof. Georges de Rham (29 luglio 1957).