

SU UN ESEMPIO DI FUNZIONE CONTINUA SENZA DERIVATA

Autor(en): **De Vito, Luciano**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-34639>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

zum Polygon fremd sind. $\overline{OP'}$ selbst liegt ausser O auch nicht darauf. Also gehört $\overline{OP'}$ bis auf O zum Teilgebiet G. Man fährt nun wie im ersten Falle weiter.

Damit ist gezeigt: Der Rand von G besteht aus Strecken, die auf dem ursprünglichen Polygon liegen. Diese Strecken bilden selbst ein geschlossenes Teilstück des Polygons, weil sich an jedem Endpunkt einer Strecke wenigstens eine weitere anschliesst. Satz 3 ist bewiesen.

SU UN ESEMPIO DI FUNZIONE CONTINUA

SENZA DERIVATA¹⁾

da Luciano DE VITO, Roma

(*Reçu le 22 avril 1958*)

..... Nel Suo articolo: « Sur un exemple de fonction continue sans dérivée », apparso su *L'enseignement mathématique*, tomo III, fascicolo 1, gennaio-marzo 1957, Ella dimostra che la funzione:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left| 2^k x - [2^k x + \frac{1}{2}] \right|,$$

ove $[y]$ è il più grande intero che non supera y , è continua e mai derivabile sull'asse x .

Credo sia di qualche interesse notare che la funzione $f(x)$ dell'elegante esempio da Lei portato non soltanto è continua, ma è anche uniformemente hölderiana con qualsiasi esponente di Hölder α , tale che $0 < \alpha < 1$. Si ha precisamente, per ogni coppia di punti x_1 e x_2 dell'asse reale:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}} |x_2 - x_1|^\alpha.$$

¹⁾ Da una lettera al Prof. Georges de Rham (29 luglio 1957).

E' infatti evidente che $\varphi(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|$ è hölderiana; per determinare il minimo coefficiente di Hölder relativo all'esponente α si procede nel modo seguente: si vede che $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|$ è maggiorato da $\frac{1}{2}$ ed inoltre $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$; ne viene:

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|^{1-\alpha} |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|^\alpha \leq 2^{\alpha-1} |x_2 - x_1|^\alpha. \quad (1)$$

Poichè nella (1) sussiste il segno $=$ per $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{1}{2}$, si ha che $2^{\alpha-1}$ non può essere sostituita nella (1) con una costante più piccola.

Dalla (1) si trae:

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2^{-k} \varphi(2^k x_2) - 2^{-k} \varphi(2^k x_1) \right\} \right| \leq \\ &\leq 2^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k - k} |x_2 - x_1|^\alpha = \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}} |x_2 - x_1|^\alpha. \end{aligned}$$

Naturalmente, con analogo ragionamento, si prova anche che è hölderiana la funzione $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \left| a^k x - \left[a^k x + \frac{1}{2} \right] \right|$ con a intero positivo pari e quindi, in particolare, quella costruita da B. L. Van der Waerden.

Analoghe considerazioni possono ripetersi per la funzione considerata da Weierstrass:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k x),$$

ove a è un intero dispari, b è tale che $0 < b < 1$ e $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Tenendo presente che ogni funzione uniformemente hölderiana con esponente di Hölder $\alpha = 1$ (cioè lipschitziana) è assolutamente continua, l'osservazione che mi sono permesso di sottoporLe pone viepiù in luce l'interesse della funzione da Lei costruita.....

N.B. — Rispondendo a questa lettera, il Prof. de Rham mi ha gentilmente comunicato le seguenti osservazioni. Con lo stesso metodo seguito per dimostrare la hölderianità di $f(x)$ con esponente di Hölder α , si può dimostrare quella della funzione

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \gamma(a^k x), \text{ ove } \gamma \text{ è una funzione hölderiana con}$$

esponente di Hölder α , nell'ipotesi che le due serie: $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$

e $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |a|^{\alpha k}$ siano convergenti. Se si assume $a = 2$,

$\gamma(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|$, $b_k \geq 0$ e se la successione $\{b_k 2^k\}$ non è infinitesima per $k \rightarrow \infty$, la funzione $g(x)$ è sprovvista di derivata in ogni punto, come mostra il ragionamento dell'articolo sopra citato del Prof. de Rham. Se si assume inoltre $b_k = 2^{-k}$ si ottiene una funzione $g(x)$ hölderiana, come si prova con il ragionamento sopra esposto. Se si assume invece $b_k = \frac{1}{k^2}$, si ottiene una funzione $g(x)$ che è sprovvista di derivata (si ha infatti $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{k^2} = \infty$) e che non è hölderiana, come segue dalla relazione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(2^{-n}) - g(0)}{2^{-n\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n\alpha-n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{k^2} = \infty \quad (0 < \alpha \leq 1).$$