RECHERCHES RÉCENTES SUR L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT TRIGONOMÉTRIQUE

Autor(en): **Salem, Raphaël**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-34640

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

RECHERCHES RÉCENTES SUR L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT TRIGONOMÉTRIQUE *)

par Raphaël SALEM, Paris

(Reçu le 8 octobre 1958.)

1. NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

a) La notion d'ensemble parfait linéaire non dense est familière. Il se construit sur la droite, en enlevant d'un intervalle, dit intervalle fondamental, une infinité dénombrable d'intervalles ouverts, non empiétants et sans extrémités communes, de telle façon que l'ensemble qui en résulte ne contienne aucun intervalle. Il sera souvent commode de construire un tel ensemble sur le tore à une dimension à la place de l'intervalle fondamental rectiligne.

Un ensemble symétrique du type de Cantor s'obtient en divisant l'intervalle fondamental en trois parties proportionnelles à ξ_1, $1 - 2\xi_1$, ξ_1 respectivement $\left(0 < \xi_1 < \frac{1}{2}\right)$ et en enlevant l'intervalle du milieu (intervalle « noir »). Les deux intervalles « blancs » restant sont tous deux divisés en trois parties proportionnelles à ξ_2, $1 - 2\xi_2$, ξ_2 respectivement $\left(0 < \xi_2 < \frac{1}{2}\right)$, et chaque intervalle médian est encore un intervalle « noir » enlevé. Etant donné une suite de nombres ξ_k $\left(0 < \xi_k < \frac{1}{2}\right)$, on procède ainsi indéfiniment; à la $p^{\text{ème}}$ étape on obtient un ensemble E_p de 2^p intervalles « blancs » chacun de longueur $\xi_1 \ldots \xi_p$, si l'intervalle fondamental est l'intervalle unité. L'intersection de tous les E_p fournit l'ensemble E cherché. Les points de l'ensemble, toujours dans l'intervalle fondamental (0, 1) ont leurs abscisses données par la formule

$$x = \varepsilon_1 (1 - \xi_1) + \varepsilon_2 \xi_1 (1 - \xi_2) + \cdots + \varepsilon_p \xi_1 \cdots \xi_{p-1} (1 - \xi_p) + \cdots \tag{1}$$

où les ε_p sont égaux à 0 ou à 1.

---

*) Conférence faite à Rome et Genève, en mai et juin 1958.

Un cas particulier intéressant est celui où tous les ξ_p sont égaux à un nombre constant ξ; on obtient alors un ensemble du type de Cantor à rapport constant. Le cas classique de Cantor est celui où $\xi = 1/3$.

b) Etant donné une fonction monotone — non décroissante pour fixer les idées — soit $f(x)$ définie dans l'intervalle (0, 1), nous appellerons coefficient de Fourier-Stieltjes de f l'intégrale de Riemann-Stieltjes:

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{nix}\, df .$$

Si f est absolument continue, cette intégrale se réduit à une intégrale de Lebesgue et donc $c_n \to 0$ pour $n \to \infty$. Si f est continue et singulière $\left(\frac{df}{dx} = 0 \text{ p.p.}\right)$, c_n peut ne pas tendre vers zéro pour $n = \infty$, mais il existe des f singulières pour lesquelles $c_n \to 0$ pour $n \to \infty$ ainsi que l'a montré Menchoff en 1916.

c) Etant donné un ensemble parfait E, symétrique du type de Cantor, nous appellerons fonction de Lebesgue construite sur cet ensemble la fonction continue $y = f(x)$ telle que quand x appartient à E et est donné par (1), y soit égal à

$$\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_p}{2^p} + \cdots$$

et que y soit constant dans chacun des intervalles contigus à E. Si E est de mesure nulle (ce qui est toujours le cas des ensembles à rapport constant) $f(x)$ est purement singulière. On démontre facilement en procédant par approximations successives, que le coefficient de Fourier-Stieltjes de la fonction de Lebesgue est donné par

$$2\pi c_n = e^{\pi n i} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \pi n \xi_1 \cdots \xi_{k-1} (1 - \xi_k) .$$

Ainsi par exemple, pour la fonction de Lebesgue construite sur l'ensemble classique de Cantor à rapport constant $\xi = 1/3$ on trouve

$$2\pi c_n = e^{\pi n i} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n}{3^k}$$

et on voit, dans ce cas, en prenant pour n des puissances successives de 3, que c_n ne tend pas vers zéro pour $n \to \infty$. Nous reviendrons plus loin sur le cas d'un rapport constant ξ quelconque, qui est plus complexe.

2. Le problème de l'unicité.

On peut le poser de la manière suivante. Existe-t-il sur $(0, 2\pi)$ des ensembles E tels qu'une série trigonométrique

$$\sum_0^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge vers zéro partout hors de E, sans être identiquement nulle ? Et, si oui, caractériser ces ensembles, qui sont dits « ensembles de multiplicité ». Un ensemble E tel que toute série trigonométrique convergeant vers zéro dans le complémentaire de E soit identiquement nulle est dit « ensemble d'unicité ».

Cantor a démontré par des méthodes célèbres que si E est vide, ou composé d'un nombre fini de points, E est un ensemble d'unicité. C'est aussi le cas si le dérivé de E est fini. Plus généralement, Cantor a démontré que tout ensemble réductible (c'est-à-dire admettant un dérivé vide de n'importe quel ordre, fini ou transfini) est un ensemble d'unicité.

Beaucoup plus tard, Young a démontré que tout ensemble dénombrable est un ensemble d'unicité.

Par contre, il est très facile de voir que tout ensemble E de mesure positive est un ensemble de multiplicité (il suffit de considérer la série de Fourier de la fonction caractéristique d'un ensemble parfait P de mesure positive contenu dans E).

La question de savoir s'il existait des ensembles de multiplicité de mesure nulle a été résolu par Menchoff en 1916; Menchoff a construit un ensemble parfait P de mesure nulle (du type de Cantor, à rapport variable) et une série trigonométrique non identiquement nulle convergeant vers zéro dans tout intervalle contigu à P.

Ceci a posé la question de la classification des ensembles parfaits de mesure nulle en ensembles d'unicité (ensembles U) et ensembles de multiplicité (ensembles M).

Avant de poursuivre, indiquons que si on considère le problème du point de vue de la convergence simple (et non du point de vue d'une méthode de sommabilité), ce n'est pas parce que la convergence simple est plus importante, mais c'est parce que c'est le problème de la convergence simple qui soulève les questions les plus intéressantes dans la classification des ensembles entre ensembles U et ensembles M.

3. Les ensembles du type H et les résultats de Rajchman.

Quelques années après le résultat de Menchoff, Rajchman a découvert toute une catégorie d'ensembles parfaits de mesure nulle qui sont des ensembles U.

Soit E un ensemble porté par le tore de longueur 1. S'il existe une suite d'entiers $\{ n_k \}_{k=1}^{\infty}$ tels que pour tout $x \in$ E et pour tout k le point $n_k\, x$ (réduit modulo 1) n'appartienne jamais à un certain intervalle J, l'ensemble est dit du type H. Ainsi l'ensemble classique de Cantor à rapport constant $\xi = 1/3$ est du type H. Il suffit de prendre $n_k = 3^k$.

Rajchman a démontré que tout ensemble du type H (ces ensembles sont nécessairement de mesure nulle) est un ensemble U.

Nina Bary a démontré que l'union d'une infinité dénombrable d'ensembles U *fermés* est encore un ensemble U.

4. Les méthodes.

D'après la théorie classique de Riemann, pour démontrer qu'un ensemble parfait P est un ensemble M, il suffit de construire une fonction F (x) non constante, mais constante dans chaque intervalle contigu à P et ayant des coefficients de Fourier qui soient $o\left(\frac{1}{n}\right)$. La série obtenue par dérivation formelle de la série de Fourier de f converge alors vers zéro dans tout intervalle contigu à P. On démontre aussi que l'existence d'une telle fonction f est nécessaire, si P est un ensemble M.

En particulier f peut être à variation bornée; dans ce cas

la série qui converge vers zéro hors de P est une série de Fourier-Stieltjes.

Donc, en particulier, pour montrer que P est un ensemble M, il suffit de construire une fonction continue non décroissante, constante dans chaque intervalle contigu à P (mais non partout) et dont les coefficients de Fourier-Stieltjes tendent vers zéro — c'est la méthode employée par Menchoff.

Il est plus compliqué de démontrer, en se servant des mêmes idées, qu'un ensemble parfait P est un ensemble U. Il faut évidemment montrer qu'il n'existe pas de fonction à variation bornée constante dans les intervalles contigus à P et à coefficients de Fourier-Stieltjes tendant vers zéro. Mais cela ne suffit pas: il faut encore montrer qu'il n'existe aucune fonction (à variation bornée ou non) constante dans chaque intervalle contigu à P et dont les coefficients de Fourier soient $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

En fait, on ne s'est jamais, à notre connaissance, servi de cette méthode pour montrer qu'un ensemble E est un ensemble U. On l'a toujours fait en montrant que E appartient à une catégorie d'ensembles (par exemple H) qui sont connus pour être des ensembles d'unicité.

5. Les résultats de Nina Bary sur les ensembles cantoriens a rapport constant rationnel.

Les ensembles de Cantor à rapport constant ξ sont, quand ξ est l'inverse d'un entier (comme pour l'ensemble ternaire classique de Cantor) du type H et donc, d'après le théorème de Rajchman, des ensembles U. Il était naturel de se demander si ces ensembles peuvent être des ensembles M pour certaines valeurs de ξ et dans l'affirmative de déterminer les valeurs de ξ pour lesquelles l'ensemble est un ensemble d'unicité ou de multiplicité.

Nina Bary a résolu ce problème pour le cas de ξ rationnel, en obtenant le résultat remarquable suivant. Soit $\xi = \frac{p}{q}$, fraction irréductible; la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble soit U est que $p = 1$; dans tous les autres cas, l'ensemble est M.

Ainsi a été mis en évidence le rôle essentiel de la nature arithmétique de ξ.

6. Le cas de ξ irrationnel. Les nombres de la classe C.

Soit θ un entier algébrique dont tous les conjugués (autres que θ lui-même) ont des modules strictement inférieurs à l'unité. On peut évidemment supposer $\theta > 0$. Et l'on a nécessairement $\theta > 1$. Nous désignerons par C la classe de tous les nombres θ. Soit $\xi = 1/\theta$. Si $\theta > 2$, ce que nous supposerons, il existe un ensemble cantorien E à rapport constant ξ. Le premier résultat obtenu dans la classification des ensembles cantoriens à rapport constant ξ irrationnel est le suivant. Pour que E soit un ensemble U, il est nécessaire que l'on ait $\xi = 1/\theta$, où θ est un nombre de la classe C. En d'autres termes, si $1/\xi$ n'appartient pas à C (par exemple si ξ est transcendant), l'ensemble est un ensemble M.

La démonstration se fait en considérant la fonction de Lebesgue construite sur l'ensemble E à rapport constant ξ et en démontrant que son coefficient de Fourier-Stieltjes

$$c_n = (2\pi)^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \pi n \xi^{k-1} (1 - \xi) \tag{2}$$

tend vers zéro pour $n \to \infty$ dès que $1/\xi$ n'appartient pas à la classe C.

Cette démonstration s'appuie à son tour sur un théorème de Pisot d'après lequel les nombres θ de la classe C sont caractérisés par l'existence d'un nombre réel λ tel que la série

$$\sum_{0}^{\infty} \sin^2 \pi \lambda \theta^n$$

soit convergente. Cette propriété est, en soi, un résultat important de la théorie des approximations diophantiennes. Elle caractérise les nombres θ de C par l'existence d'un λ tel que $\lambda\theta^n$, réduit modulo 1, tende vers zéro assez vite pour que la somme des carrés de $\{\lambda\theta^n\}$ converge, ($\{z\}$ désignant la différence en valeur absolue entre z et l'entier le plus voisin).

7. Le cas de ξ irrationnel *(suite)*. Les ensembles $H^{(n)}$ de Piatecki-Shapiro.

Le résultat ci-dessus ne résoud pas entièrement le problème de la classification des ensembles cantoriens $E(\xi)$ à rapport constant ξ suivant les valeurs de ξ. Il laisse en effet intact le problème de savoir si la condition $\xi = 1/\theta$, $\theta \in C$ est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que $E(\xi)$ soit un ensemble U. Ainsi que nous l'avons vu plus haut, il ne suffit pas de montrer — ce qui est facile — que le coefficient de Fourier-Stieltjes c_n de (2) ne tend pas vers zéro quand $\xi = \frac{1}{\theta}$, $\theta \in C$ pour en conclure que $E(\xi)$ est un ensemble U.

La solution du problème a été rendue possible par la découverte, par Piatecki-Shapiro, d'un nouveau type d'ensemble d'unicité, les ensembles du type $H^{(n)}$ qui ne se réduisent pas aux ensembles H ou à leur union. Considérons le cas de $n = 2$, qui est typique.

Nous dirons qu'une suite de vecteurs V de coordonnées entières p_k, q_k dans l'espace euclidien R^2 est normale si quels que soient les entiers fixes a, b l'expression $|ap_k + bq_k|$ croît indéfiniment avec k.

Ceci dit, considérons un ensemble E contenu pour fixer les idées dans (0, 1). Soit $x \in E$ et considérons le point P de coordonnées $p_k x$, $q_k x$ réduites modulo 1, c'est-à-dire prises sur le tore unité dans R^2. Si quel que soit $x \in E$, et quel que soit k le point P_k n'appartient jamais à un certain ensemble G ouvert du tore, on dit que E est du type $H^{(2)}$. L'analogie avec les ensembles du type H est évidente, et la généralisation à l'espace euclidien R^n est immédiate, fournissant des ensembles du type $H^{(n)}$.

Grâce au théorème de Piatecki-Shapiro, d'après lequel tout ensemble du type $H^{(n)}$ est un ensemble U, on peut démontrer que l'ensemble cantorien $E(\xi)$ à rapport constant ξ où $\xi = 1/\theta$, $\theta \in C$ est un ensemble U. On démontre, en effet, que si θ est de degré n, $E(\xi)$ est de type $H^{(n)}$ précisément. Le vecteur « normal » V_k qu'on considère ici a pour coordonnées les entiers

$$a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \cdots a_{k+n}$$

où $a_s = \theta^s + \varepsilon_s$ et $\varepsilon_s \to 0$ et le fait qu'il est normal se démontre en remarquant que quels que soient les entiers $c_1 \dots c_n$ on a toujours

$$c_1 + c_2\,\theta + \cdots + c_n\,\theta^{n-1} \neq 0$$

puisque θ est de degré n. C'est ainsi que s'établit la relation entre le type de l'ensemble et le degré de l'entier algérbique θ.

BIBLIOGRAPHIE

Sur la théorie générale, consulter:

A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Warszawa-Lewow, 1953, mais plus spécialement la nouvelle édition de cet ouvrage, qui est sur le point de paraître en Angleterre, Cambridge University Press.

Sur les ensembles U et M, on consultera:

N. Bari, *The uniqueness problem*, Translation No. 52 of the American Mathematical Society (translated from *Uspechi Mat. Nauk* (1949)).

Mémoires originaux.

D. E. Menchoff, Sur l'unicité du développement trigonométrique. *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, vol. 163 (1916), pp. 433-436.

A. Rajchman, Sur l'unicité du développement trigonométrique. *Fundamenta Mathematica*, 3 (1922), pp. 286-302.

N. K. Bari, Sur le rôle des lois diophantiques dans le problème de l'unicité du développement trigonométrique. *Rec. Math. de Moscou N. S.*, 2 (44) (1937), pp. 99-724.

R. Salem, Sets of uniqueness and sets of multiplicity. *Trans. Am. Math. Soc.*, 54 (1943), pp. 218-228 et 56 (1944), pp. 32-49.

—— Rectification to the papers « Sets of uniqueness and sets of multiplicity ». *Trans. Am. Math. Soc.*, 63 (1948), pp. 595-598.

Piatecki-Shapiro, *Uspekhi Mat. Nauk*, 8 (1953), pp. 167-170 et *Ucenye Zapiski Mosc.* (1954).

R. Salem et A. Zygmund, Sur un théorème de Piatecki-Shapiro. *Comptes rendus*, 240 (1955), pp. 2040-2042.

—— et A. Zygmund, Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant. *Comptes rendus*, 240 (1955), pp. 2281-2283.

Sur les nombres de la classe C, on consultera:

C. Pisot, La répartition modulo 1 et les nombres algébriques. *Annali di Pisa*, 7 (1938), pp. 205-248.

R. Salem, A remarkable class of algebraic integers. *Duke Math. Journ.*, 11 (1944), pp. 103-108.

J. W. S. Cassels, Diophantine Approximation. *Cambridge tracts No. 45* (Camb. Univ. Press, 1957).