5. Les résultats de Nina Bary sur les ensembles cantoriens a rapport constant rationnel.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

la série qui converge vers zéro hors de P est une série de Fourier-Stieltjes.

Donc, en particulier, pour montrer que P est un ensemble M, il suffit de construire une fonction continue non décroissante, constante dans chaque intervalle contigu à P (mais non partout) et dont les coefficients de Fourier-Stieltjes tendent vers zéro — c'est la méthode employée par Menchoff.

Il est plus compliqué de démontrer, en se servant des mêmes idées, qu'un ensemble parfait P est un ensemble U. Il faut évidemment montrer qu'il n'existe pas de fonction à variation bornée constante dans les intervalles contigus à P et à coefficients de Fourier-Stieltjes tendant vers zéro. Mais cela ne suffit pas: il faut encore montrer qu'il n'existe aucune fonction (à variation bornée ou non) constante dans chaque intervalle contigu à P et dont les coefficients de Fourier soient $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

En fait, on ne s'est jamais, à notre connaissance, servi de cette méthode pour montrer qu'un ensemble E est un ensemble U. On l'a toujours fait en montrant que E appartient à une catégorie d'ensembles (par exemple H) qui sont connus pour être des ensembles d'unicité.

5. Les résultats de Nina Bary sur les ensembles cantoriens a rapport constant rationnel.

Les ensembles de Cantor à rapport constant ξ sont, quand ξ est l'inverse d'un entier (comme pour l'ensemble ternaire classique de Cantor) du type H et donc, d'après le théorème de Rajchman, des ensembles U. Il était naturel de se demander si ces ensembles peuvent être des ensembles M pour certaines valeurs de ξ et dans l'affirmative de déterminer les valeurs de ξ pour lesquelles l'ensemble est un ensemble d'unicité ou de multiplicité.

Nina Bary a résolu ce problème pour le cas de ξ rationnel, en obtenant le résultat remarquable suivant. Soit $\xi = \frac{p}{q}$, fraction irréductible; la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble soit U est que $p = 1$; dans tous les autres cas, l'ensemble est M.

Ainsi a été mis en évidence le rôle essentiel de la nature arithmétique de ξ.

6. Le cas de ξ irrationnel. Les nombres de la classe C.

Soit θ un entier algébrique dont tous les conjugués (autres que θ lui-même) ont des modules strictement inférieurs à l'unité. On peut évidemment supposer $\theta > 0$. Et l'on a nécessairement $\theta > 1$. Nous désignerons par C la classe de tous les nombres θ. Soit $\xi = 1/\theta$. Si $\theta > 2$, ce que nous supposerons, il existe un ensemble cantorien E à rapport constant ξ. Le premier résultat obtenu dans la classification des ensembles cantoriens à rapport constant ξ irrationnel est le suivant. Pour que E soit un ensemble U, il est nécessaire que l'on ait $\xi = 1/\theta$, où θ est un nombre de la classe C. En d'autres termes, si $1/\xi$ n'appartient pas à C (par exemple si ξ est transcendant), l'ensemble est un ensemble M.

La démonstration se fait en considérant la fonction de Lebesgue construite sur l'ensemble E à rapport constant ξ et en démontrant que son coefficient de Fourier-Stieltjes

$$c_n = (2\pi)^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \pi n \xi^{k-1} (1 - \xi) \tag{2}$$

tend vers zéro pour $n \to \infty$ dès que $1/\xi$ n'appartient pas à la classe C.

Cette démonstration s'appuie à son tour sur un théorème de Pisot d'après lequel les nombres θ de la classe C sont caractérisés par l'existence d'un nombre réel λ tel que la série

$$\sum_{0}^{\infty} \sin^2 \pi \lambda \theta^n$$

soit convergente. Cette propriété est, en soi, un résultat important de la théorie des approximations diophantiennes. Elle caractérise les nombres θ de C par l'existence d'un λ tel que $\lambda\theta^n$, réduit modulo 1, tende vers zéro assez vite pour que la somme des carrés de $\{\lambda\theta^n\}$ converge, ($\{z\}$ désignant la différence en valeur absolue entre z et l'entier le plus voisin).