ART DES KEGELSCHNITTES, DEN ZWEI PROJEKTIVE GEBILDE ERZEUGEN

Autor(en): **Mazkewitsch, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-35496

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ART DES KEGELSCHNITTES, DEN ZWEI PROJEKTIVE GEBILDE ERZEUGEN

von D. Mazkewitsch, Cincinnati, Ohio

(Reçu le 4 juillet 1959)

Wir wollen ein Kriterium finden, das festzustellen ermöglicht, welchen der drei Kegelschnitte zwei gegebene projektive Gebilde erzeugen.

1. Wir betrachten zwei projektive Punktreihen t und t' als Schnitte von zwei perspektiven Strahlenbüscheln B und C, deren

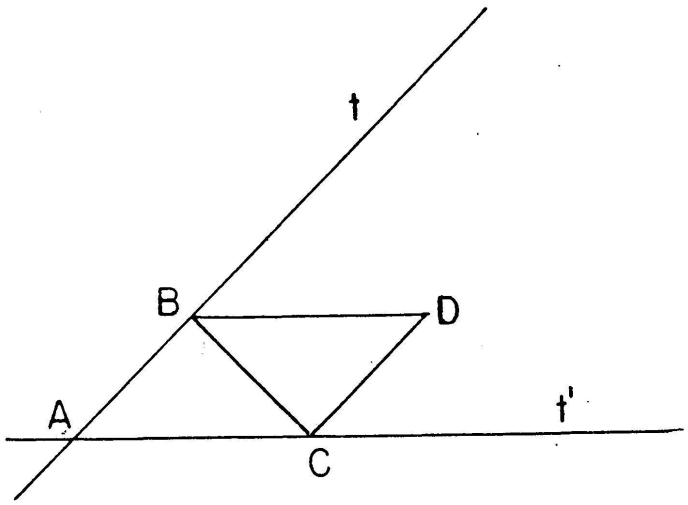

FIG. 1

zwei entsprechende Strahlen in der Verbindungsgeraden BC der beiden Scheitel liegen. Die Scheitel wählen wir auf den Trägern t und t'. Die Büschel B und C haben eine Perspektivitätsachse (PA).

Wir wissen, dass zwei projektive Punktreihen einen der drei Kegelschnitte als Envelope erzeugen; dass BC, t und t' Tangenten des Kegelschnittes und dass die Schnittpunkte der letzteren mit der PA die Berührungspunkte sind.

Nun ziehe zu den Trägern t und t' durch B und C Parallelen, die sich in D schneiden (Fig. 1).

a) Die Ellipse ist eine geschlossene Kurve. Sie wird erzeugt, wenn die PA AB und AC oder BD und DC schneidet. Denn, wie leicht zu beweisen ist, nur in diesen Fällen liegen zwei entsprechende Punkte links bzw. rechts von BC und die erzeugte Kurve ist somit eine geschlossene Kurve.

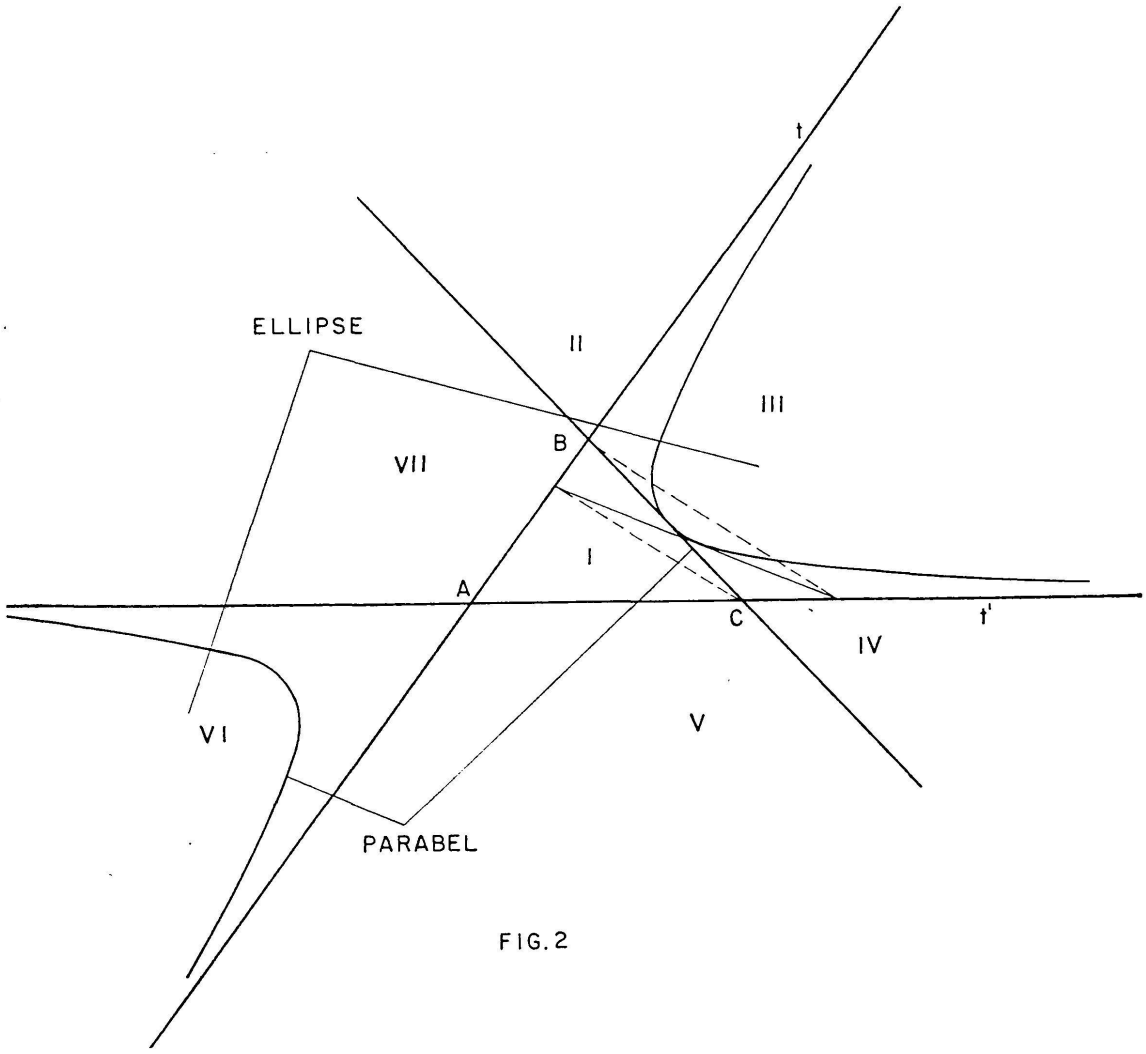

FIG. 2

b) Geht die PA durch D, so sind die Punkte im Unendlichen auf den Trägern t und t' entsprechende Punkte und die von den projektiven Punktreihen erzeugte Kurve ist eine Parabel.

c) In allen anderen Fällen des Schneidens der PA werden Hyperbeln erzeugt.

Rückt nun die PA ins Unendliche, so ist die erzeugte Kurve immer noch eine Hyperbel, aber die entsprechenden Strahlen der perspektiven Büschel B und C werden zueinander parallel.

Zieht man also durch zwei Punkte B und C parallele Strahlen und schneidet diese durch zwei Geraden t und t', so hüllen die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte auf t und t' eine Hyperbel ein.

Das eben Gesagte ermöglicht es, die Art des Kegelschnittes festzustellen, wenn derselbe durch fünf Tangenten gegeben ist [1]).

2. Dual betrachten wir zwei projektive Strahlenbüschel B und C. Irgend welche zwei entsprechende Strahlen BA $= t$ und CA $= t'$ schneiden die Strahlenbüschel in zwei perspektiven Punktreihen, die ein Perspektivitätszentrum (PZ) P besitzen. Die Ebene ist nun in sieben Gebiete, I bis VII, geteilt (Fig. 2).

a) Liegt P in einem der Gebiete II, IV, V, VII, so ist der erzeugte Kegelschnitt eine Hyperbel, da die Strahlenbüschel gegenläufig sind [2]) [3]). In den anderen drei Gebieten sind die Strahlenbüschel gleich läufig und können irgend einen der drei Kegelschnitte erzeugen [2]).

b) Liegt P auf der in 1*c* besprochenen Hyperbel, so haben die Strahlenbüschel ein Paar paralleler entsprechender Strahlen. Sie können kein zweites Paar paralleler entsprechender Strahlen haben, da in einem Punkte eines Kegelschnittes nur eine Tangente möglich ist. Folglich ist die erzeugte Kurve eine Parabel. Die eben erwähnte Hyperbel ist die Grenze, von der Steiner a. a. O. spricht.

Ausserhalb und innerhalb dieser Grenze werden nur Ellipsen oder nur Hyperbeln erzeugt [2]).

c) Nun sahen wir in 2*a*, dass wenn P in II, IV, V, VII, welche ausserhalb der Hyperbel sich befinden, liegt, Hyperbeln erzeugt werden. Folglich, wenn P in I, II, IV, V, VII und in III und VI ausserhalb der Hyperbel liegt, so wird eine Hyperbel erzeugt. Liegt P in III oder in VI innerhalb der Hyperbel, so muss die erzeugte Kurve eine Ellipse sein [4]).

---

[1]) Vgl. Th. Reye, *Geometrie der Lage*, 1-ste Abt., 1909, S. 86 betreffs der Schwierigkeit der Feststellung der Art der Kurve.

[2]) J. Steiner, *Systematische Entwicklung*, 1832, S. 144 oder *Gesammelte Werke*, 1881, Bd. 1, S. 336.

[3]) Th. Reye, *op. cit.*, S. 85.

[4]) In Fig. 2 sind nur die Gebiete bezeichnet, in denen P liegen muss, falls der erzeugte Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Parabel sein soll. Liegt P in irgend einem anderen Punkte der Ebene, so ist der erzeugte Kegelschnitt eine Hyperbel.

In allen unter 2 betrachteten Fällen sind PB und PC Tangenten des Kegelschnittes als entsprechende Strahlen des gemeinsamen Strahles BC. Diese Tatsache ermöglicht eine leichte Lösung der folgenden Aufgaben.

a) Gegeben fünf Punkte eines Kegelschnittes; zu zeichen Tangenten in zwei der Punkte. Betrachte die zwei Punkte als B und C und irgend einen der anderen Punkte als A. Finde P und verbinde ihn mit den zwei Punkten.

b) Gegeben fünf Punkte A, B, C, D, E eines Kegelschnittes; zu finden das Zentrum des Kegelschnittes. Finde P für z. B. ABC und verbinde ihn mit dem Mittelpunkte von BC. Finde P′ für z. B. ADE und verbinde ihn mit dem Mittelpunkte von DE. Der Schnittpunkt der beiden Verbindungsgeraden ist das Zentrum.