§ 1. Définition. Enoncé de théorèmes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LES COURBES LIMITES DE POLYGONES OBTENUS PAR TRISECTION

par Georges DE RHAM (Lausanne)

(Reçu le 25 octobre 1958)

§ 1. DEFINITION. ENONCÉ DE THÉORÈMES.

Soit P une ligne polygonale à n côtés, de sommets $S_0, S_1, \ldots, S_n$. Sur le côté $S_i S_{i+1}$, considérons les points S'_{2i} et S'_{2i+1} qui le divisent en trois segments $S_i S'_{2i}$, $S'_{2i} S'_{2i+1}$, $S'_{2i+1} S_{i+1}$ proportionnels à trois nombres positifs donnés β_1, α, β_2 de somme 1,

$$\beta_1 + \alpha + \beta_2 = 1 .$$

Les points $S'_0, S'_1, \ldots, S'_{2n-1}$ sont les sommets d'une nouvelle ligne polygonale P′ à $2n - 1$ côtés.

Nous appelons *trisection* l'opération faisant passer de P à P′. Cette opération est complètement déterminée par la donnée des nombres

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\alpha}, \qquad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\alpha}$$

que nous appellerons *les rapports de la trisection.* Ce sont deux nombres positifs qui peuvent être choisis arbitrairement.

Il est clair que le point M qui divise le côté $S_i S_{i+1}$ de P en deux segments $S_i M$ et MS_{i+1} proportionnels à β_1 et β_2 divise aussi le côté $S'_{2i} S'_{2i+1}$ de P′ en deux segments proportionnels à β_1 et β_2 (fig. 1). Autre remarque évidente qui sera utile: si la longueur des côtés de P ne dépasse pas l, la longueur des côtés de P′ ne dépasse pas le plus grand des nombres αl et $(\beta_1 + \beta_2)\, l$.

Partons d'une ligne polygonale P_0 à deux côtés et répétons cette opération. On obtient une suite de lignes polygonales P_n à $2^n + 1$ côtés ($n = 0, 1, 2, \ldots$), P_{n+1} se déduisant de P_n par une trisection de rapports donnés indépendants de n. Toutes ces lignes polygonales sont convexes et elles tendent vers une courbe limite C que nous nous proposons d'étudier.

Soient S_i^n ($i = 0, 1, ..., 2^n + 1$) les sommets de P_n. D'après la première remarque ci-dessus, le point M qui divise le côté $S_h^n S_{h+1}^n$ de P_n dans le rapport $\beta_1 : \beta_2$, divise dans le même rapport le côté $S_{2h}^{n+1} S_{2h+1}^{n+1}$ de P_{n+1} et aussi d'une manière générale le côté $S_{2^k h}^{n+k} S_{2^k h+1}^{n+k}$ de P_{n+k}. Appartenant à tous les polygones P_{n+k} ($k = 0, 1, 2, ...$), ce point appartient aussi à la courbe C

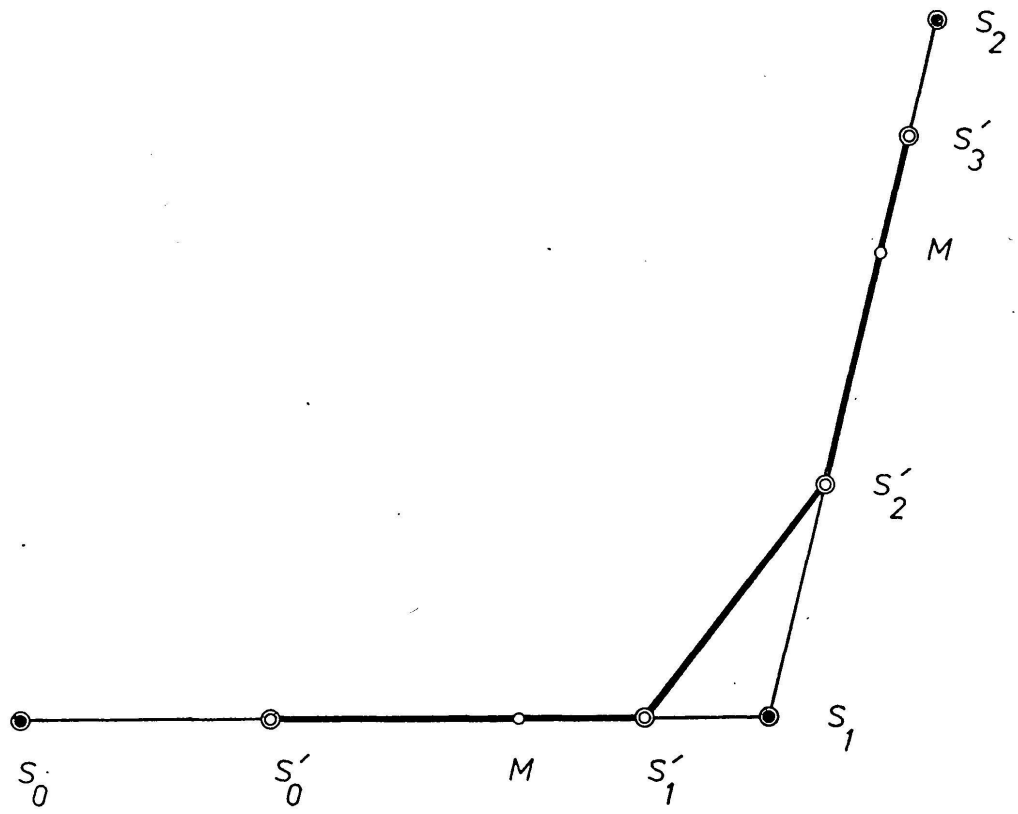

Fig. 1.

et comme il est bien déterminé par la fraction binaire $h2^{-n}$, nous le désignerons par $M(h2^{-n})$.

D'après la seconde remarque ci-dessus, si l est le plus grand côté de P_0, la longueur des côtés de P_n ne dépasse pas $l\rho^n$, où $\rho = \sup\{\beta_1 + \beta_2, \alpha\} < 1$, et il en est de même pour la distance des points $M(h2^{-n})$ et $M(h2^{-n} + 2^{-n})$. Cela entraîne que l'ensemble des points $M(h2^{-n})$ associés aux fractions binaires $h2^{-n}$ est dense sur la courbe C et que l'application $h2^{-n} \to M(h2^{-n})$ est uniformément continue et se prolonge par suite en une application continue $t \to M(t)$ de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ sur la courbe C, qui se trouve ainsi paramétrisée d'une manière naturelle.

Introduisons un système de coordonnées cartésiennes Oxy, tel que $M(0) = (0, 0)$, $M(1) = (1, 1)$ et $S_1^0 = (1, 0)$. Le pre-

mier côté de P_0 est alors sur Ox et le second côté de P_0 sur la droite d'équation $x = 1$ (fig. 2). On désignera par $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$. Ce sont des fonctions continues de t, qui croissent de 0 à 1 lorsque t croît de 0 à 1.

Les polygones P_n étant tous convexes, la courbe C est aussi convexe. Par suite, elle a en chaque point $M(t)$ une tangente à

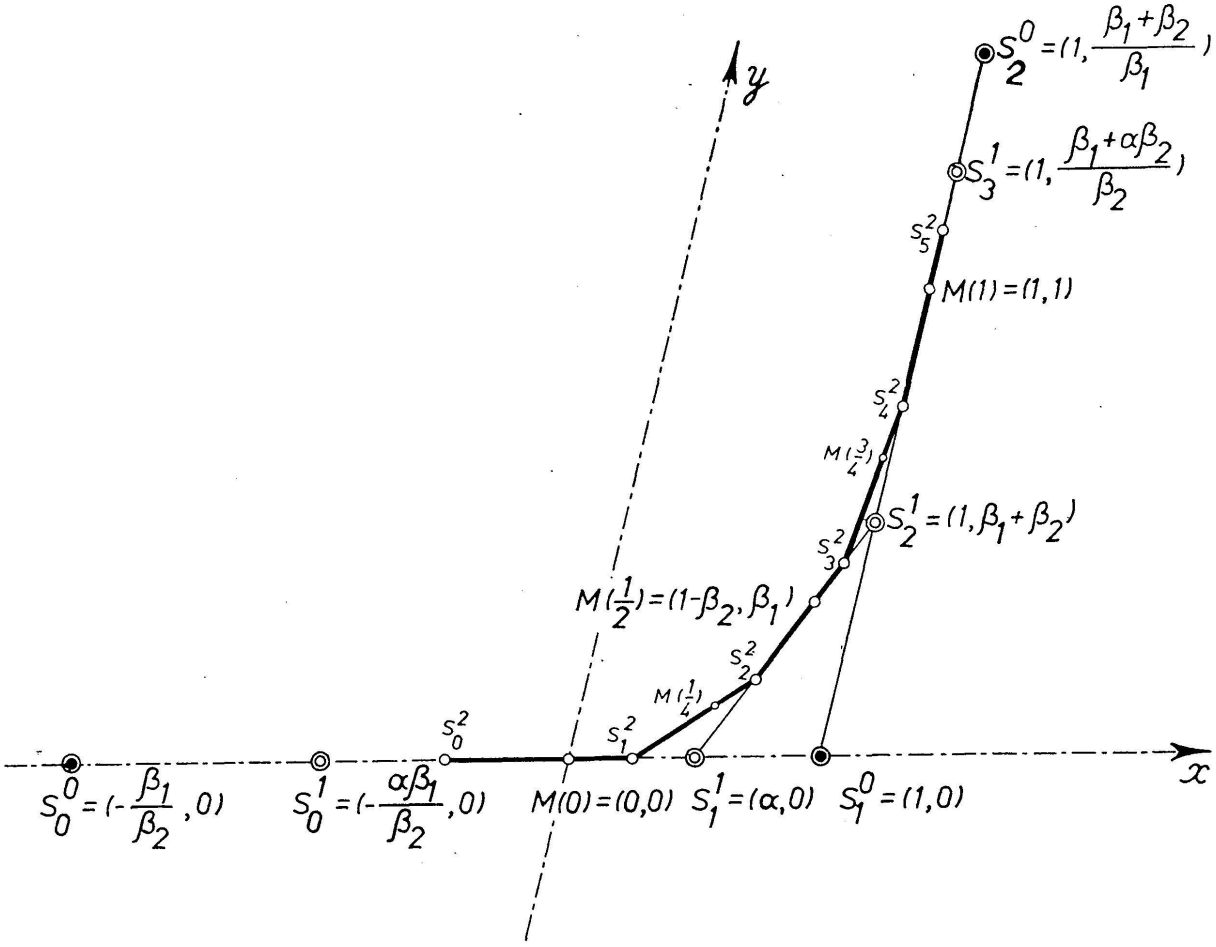

Fig. 2.

droite et une tangente à gauche, et sauf éventuellement aux points d'un ensemble au plus dénombrable, ces deux tangentes coïncident en une tangente unique. Nous désignerons le coefficient angulaire de cette tangente par $m(t)$. C'est une fonction croissante de t, parce que C est convexe. Aux points anguleux correspondent des discontinuités de première espèce de $m(t)$, les coefficients angulaires des tangentes à droite et à gauche étant $m(t+0)$ et $m(t-0)$. Si $t = h2^{-n}$ est une fraction binaire, le côté de P_n qui contient $M(h2^{-n})$, ne traversant pas C, a un coefficient angulaire égal à $m(h2^{-n})$ si $M(h2^{-n})$ n'est pas un

point anguleux et compris entre $m(h2^{-n} - 0)$ et $m(h2^{-n} + 0)$ si $M(h2^{-n})$ est un point anguleux; dans ce dernier cas, *nous conviendrons de définir* $m(h2^{-n})$ *en le posant égal au coefficient angulaire du côté de* P_n *qui contient* $M(h2^{-n})$. Le point $M(t)$ n'étant jamais un point anguleux si t n'est pas une fraction binaire, comme on verra, il en résultera que $m(t)$ est univoquement définie dans tout l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. On a $m(0) = 0$, $m(1) = \infty$ et pour $0 < t < 1$, $m(t)$ est fini > 0.

Dans cet article, je me propose d'établir quelques propriétés des fonctions $m(t)$, $m(x)$, $x(t)$ et $y(t)$, qui sont énoncées dans les théorèmes suivants.

I. *La fonction* m (t) *est continue pour toute valeur de* t *qui n'est pas une fraction binaire. Pour toute fraction binaire* t, $0 \leqslant t < 1$ *(resp.* $0 < t \leqslant 1$*), la fonction* m (t) *est continue ou discontinue à droite (resp. à gauche) selon que* $\gamma_1 \leqslant 1$ *ou* $\gamma_1 > 1$ *(resp.* $\gamma_2 \leqslant 1$ *ou* $\gamma_2 > 1$*).*

La première assertion entraîne que $m(t)$ est univoquement défini dans tout l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, comme il a été dit. La seconde assertion montre que, si $\gamma_1 \leqslant 1$ et $\gamma_2 \leqslant 1$, la courbe C n'a pas de points anguleux, tandis que si $\gamma_1 > 1$ ou $\gamma_2 > 1$, elle a une infinité de points anguleux: tous les points $M(t)$ pour lesquels t est une fraction binaire, $0 < t < 1$.

II. *Sauf dans le cas où* $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, *la fonction* m (t) *n'a pour aucune valeur de* t *une dérivée non nulle.*

La dérivée de $m(t)$ est donc nulle partout où elle existe, et comme elle existe presque partout, d'après un théorème bien connu de Lebesgue, $m(t)$ est une fonction singulière. En considérant m comme fonction de x, on a une fonction $m(x)$ qui jouit aussi de cette propriété.

III. *Sauf dans le cas ou* $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, *la fonction* m (x) *n'a pour aucune valeur de* x *une dérivée non nulle.*

La fonction $m(x)$ est donc aussi une fonction singulière, ce qui signifie que *la courbure de* C *est presque partout nulle.*

IV. *Si* $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 1$, *la fonction* ax (t) + by (t), *où* a *et* b *sont des constantes, n'a pour aucune valeur de* t *une dérivée non nulle.*

Cela s'applique en particulier aux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ qui sont par suite des fonctions singulières. Mais il n'en est plus ainsi lorsque $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

V. *Si* $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, *les fonctions* x (t) et y (t) *sont liées par la relation*

$$\gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t) = t$$

et elles ont des dérivées premières continues

$$x'(t) = \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}, \qquad y'(t) = \frac{m(t)}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}.$$

En vertu de II, si $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \neq \frac{1}{2}$ ces dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ sont des fonctions singulières.

Le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$ est effectivement exceptionnel; alors $x = 2t - t^2$, $y = t^2$, $m = \frac{t}{1-t}$ et la courbe C est une parabole.

Dans un article antérieur *), j'ai établi I pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2$ et II, III et IV pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, en utilisant des équations fonctionnelles vérifiées par M (t). Je traiterai ici le cas général par une méthode directe et plus simple. Ensuite, revenant sur les équations fonctionnelles, je montrerai que, dans le cas où $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \neq \frac{1}{2}$, les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ se réduisent essentiellement à une fonction singulière très simple et connue.

§ 2. Démonstration des théorèmes.

Désignons par $Q_{n,h}$ la projection du côté $S_h^n S_{h+1}^n$ de P_n, faite parallèlement à une droite donnée quelconque sur une autre

*) « Sur une courbe plane », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, *39* (1956), pp. 25-42. Voir aussi sur le même sujet: « Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane », *Elemente der Mathematik*, *2* (1947), pp. 73-76 et 89-97; ainsi que: « Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles », *Rendiconti del Seminario Matematicà dell' Università e del Politecnico di Torino*, *16* (1957), pp. 101-113.