0, 3. Distributions multinormales.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

nous poserons

$$\mathbf{C}\,\mathfrak{b}_P = \mathbf{E}[\mathfrak{b}_P - \mathbf{E}\,\mathfrak{b}_P]\,[\mathfrak{b}_P - \mathbf{E}\,\mathfrak{b}_P]^{\mathrm{T}} .$$

$\mathbf{C}\,\mathfrak{b}_P$ est une matrice carrée, symétrique; elle est appelée «matrice des covariances de $\mathfrak{b}_P$» [6]).

0, 3. *Distributions multinormales.*

0, 31. Rappelons que, si $\mathfrak{b}$ est un vecteur aléatoire multinormal, non dégénéré, de dimension n, si $\mathfrak{b}_P$ est la matrice $n \times 1$, de composantes $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$, qui le représente par rapport à une base certaine $\mathfrak{P}$, et si l'on pose

$$\mathbf{E}\,\mathfrak{b}_P = \mathfrak{m}_P , \quad \mathbf{C}\,\mathfrak{b}_P = \mathfrak{S}_P ,$$

on a $\operatorname{rg} \mathfrak{S}_P = n$ et

$$\mathbf{Pr}\,[\mathbf{b}_i \leqslant u_i ,\ i = 1, \ldots, n] =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\,|\,\mathfrak{S}\,|^{-1/2} \int_{-\infty}^{u_1} \cdots \int_{-\infty}^{u_n} \exp\left[-\frac{1}{2}\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{m}_P)^T\,\mathfrak{S}_P^{-1}\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{m}_P)\right] d\,\mathfrak{x} .$$

0, 32. Par ailleurs, si $\mathfrak{b}$ est le vecteur décrit ci-dessus, et si $\mathfrak{a}$ est un vecteur aléatoire lié à $\mathfrak{b}$ par une transformation linéaire régulière et certaine:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b} \quad (\operatorname{rg} \mathfrak{A} = n) ,$$

$\mathfrak{a}$ est aussi un vecteur aléatoire multinormal non dégénéré, de dimension n, et on a

$$\mathbf{E}\,\mathfrak{a}_P = \mathfrak{A}_P\,\mathbf{E}\,\mathfrak{b}_P , \qquad \mathbf{C}\,\mathfrak{a}_P = \mathfrak{A}_P\,(\mathbf{C}\,\mathfrak{b}_P)\,\mathfrak{A}_P^T .$$

0, 33. Rappelons encore que, si $\mathfrak{b}$ est comme ci-dessus, les composantes $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ de $\mathfrak{b}_P$ sont des variables aléatoires normales; celles-ci sont indépendantes si, et seulement si, $\mathbf{C}\,\mathfrak{b}_P$ est une matrice diagonale [ou, ce qui revient au même, si $\operatorname{cov}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = 0,\ i \neq j$ [7])]. La réalisation de cette condition, pour un $\mathfrak{b}$ donné, dépend essentiellement du choix de $\mathfrak{P}$. En fait, il est toujours possible de rapporter un vecteur multinormal à une base (certaine) telle que ses composantes soient des aléatoires indépendantes.

0, 34. Rappelons enfin que, si l'on nomme « gaussienne » toute aléatoire normale de moyenne nulle et de variance égale à 1, on a les énoncés suivants (cfr. [III], chap. 18):

a) la somme des carrés de p aléatoires gaussiennes indépendantes est une aléatoire χ^2 à p degrés de liberté (en abrégé, χ_p^2);

b) si $\mathbf{x}$ est une aléatoire gaussienne et $\mathbf{u}$ une aléatoire χ_p^2 indépendante de $\mathbf{x}$, le quotient $\mathbf{x}/\sqrt{(\mathbf{u}/p)}$ est une aléatoire de Student à p degrés de liberté (en abrégé, $\mathbf{t}_p$);

c) si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des aléatoires χ^2, respectivement à m et n degrés de liberté, indépendantes, le quotient $(\mathbf{u}/m):(\mathbf{v}/n)$ est une aléatoire $\mathbf{F}$ de Snedecor à (m, n) degrés de liberté (en abrégé, $\mathbf{F}_{m,n}$); il est souvent plus commode d'utiliser alors le fait que $\mathbf{v}/(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ est une aléatoire $\beta_{p,q}$ avec $p = n/2$, $q = m/2$, et de se référer aux tables de la distribution β (en général, en effet, $n \geqslant m$, donc $p \geqslant q$, comme dans les tables de Pearson [IV]); on notera que les grandes valeurs de $\mathbf{F}$ correspondent aux petites valeurs de β.

1. Modèles linéaires. Estimateurs.

1, 1. *Définitions.*

1, 11. Considérons une expérience aléatoire dont le résultat est un n-uple ordonné de nombres réels, toutes les valeurs a priori possibles, de $-\infty$ à $+\infty$, étant en effet à prendre en considération. Structurons l'ensemble des observations possibles en un espace vectoriel euclidien sur le corps des réels en postulant que, si $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ et $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ sont deux observations, on a

pour la somme:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \ , \tag{1}$$

pour le produit par un scalaire:

$$p\,\alpha = (p\,a_1, \ldots, p\,a_n) \ , \tag{2}$$

pour le produit scalaire:

$$< \alpha, \beta > = a_1\,b_1 + \ldots + a_n\,b_n \ . \tag{3}$$