1,3. Exécution des calculs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1, 22. Théorème. *Parmi tous les estimateurs fidèles de la combinaison estimable* $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$, *l'estimateur privilégié a la variance minimum.*

Soit en effet $\mathfrak{m}^\star$ tel que $\mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} = \mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$. On a, en posant $\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{x}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} &= \mathbf{E}\,[\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x}]\,[\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x}] \\ &= \mathbf{E}\,(\mathfrak{m}^\star\,\tilde{\mathfrak{x}})\,(\tilde{\mathfrak{x}}^\star\,\mathfrak{m})^\star = \mathfrak{m}^\star\,(\mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\tilde{\mathfrak{x}}^\star)\,\mathfrak{m}\,. \qquad (5)\end{aligned}$$

La définition des propriétés distributionnelles de $\mathfrak{x}$ faisant intervenir la base $\mathfrak{P}$, introduisons cette base pour un calcul explicite:

$$\mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\tilde{\mathfrak{x}}^\star = \mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}_P\,(\tilde{\mathfrak{x}}_P)^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}\begin{Vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1^2 & \tilde{\mathbf{x}}_1\,\tilde{\mathbf{x}}_2 \ldots & \tilde{\mathbf{x}}_1\,\tilde{\mathbf{x}}_n \\ \vdots & & \\ \tilde{\mathbf{x}}_n\,\tilde{\mathbf{x}}_1 \ldots & & \tilde{\mathbf{x}}_n^2 \end{Vmatrix}$$

$$= \mathfrak{J}_n\,\sigma^2$$

d'où

$$\operatorname{var}\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{m})\,\sigma^2\,.$$

Soit alors

$$\mathfrak{m}^\star = \mathfrak{l}_f^\star + \mathfrak{m}_0^\star\,,$$

de sorte que

$$\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_0^\star\,\mathfrak{l}_f = 0\,;$$

on a

$$\operatorname{var}\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{l}_f)\,\sigma^2 + (\mathfrak{m}_0^\star\,\mathfrak{m}_0)\,\sigma^2 \geqslant (\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{l}_f)\,\sigma^2 = \operatorname{var}\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{x},$$

l'inégalité étant d'ailleurs stricte si $\mathfrak{m}_0^\star \neq 0$.

1, 3. *Exécution des calculs.*

1, 31. Pour l'exécution effective des calculs, il importe d'introduire une base dans chacun des espaces considérés; dans ce paragraphe, V et $\mathsf{V}^\star$ sont rapportés aux bases $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^\star$, B et $\mathsf{B}^\star$ sont rapportés à des bases déterminées $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}^\star$.

1, 32. Pour que $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}_0$, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{A} = 0$; donc

l'espace des erreurs est engendré par ceux des vecteurs de $\mathsf{V}^\star$ *qui sont orthogonaux aux colonnes de la matrice* $\mathfrak{A}$ *(plus explicitement:* $\mathfrak{A}_{P,H}$*).*

Il en résulte immédiatement que l'espace des estimatrices est engendré par les lignes de la matrice $\mathfrak{A}^T$, donc

toute estimatrice est de la forme $\mathfrak{l}^\star \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}$.

Comme $\mathbf{E}\, \mathfrak{l}^\star \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} = \mathfrak{l}^\star \mathfrak{A}^T \mathbf{E}\, \mathfrak{x} = \mathfrak{l}^\star \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\, \mathfrak{b}_H$, cet énoncé, à son tour, entraîne celui-ci:

toute combinaison estimable est de la forme $\mathfrak{l}^\star \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\, \mathfrak{b}_H$ *et réciproquement.*

Ainsi la correspondance biunivoque entre estimatrices et combinaisons estimables est clairement mise en évidence:

a) si $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ est estimable, il existe nécessairement un vecteur $\mathfrak{m}_f^T \in \mathbf{B}^\star$ tel que $\mathfrak{f}^T = \mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$;

b) l'estimateur privilégié de $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ est alors $\mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}$ (de sorte que $\mathfrak{l}_f^\star = \mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T$);

c) la variance de cet estimateur vaut $[\mathfrak{m}^T (\mathfrak{A}^T \mathfrak{A})\, \mathfrak{m}]\, \sigma^2$.

1, 33. Supposons que $r = p$. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^T$, et $\mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$ sont alors des matrices de rang p, et le système de dimension p en l'inconnue $\hat{\mathfrak{b}}_H$

$$\mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} \tag{6}$$

détermine entièrement cette inconnue. Celle-ci jouit de la précieuse propriété que voici:

l'estimateur privilégié de $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ *n'est autre que* $\mathfrak{f}^T \hat{\mathfrak{b}}_H$.

En effet, soit $\mathfrak{f}^T = \mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$; on a

$$\mathfrak{l}_f^\star \mathfrak{x} = \mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} = (\mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A})\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{f}^T \hat{\mathfrak{b}}_H\,, \quad \text{q.e.d.}$$

1, 34. Si $r < p$, le système (6) ne détermine pas univoquement l'inconnue $\hat{\mathfrak{b}}_H$. Pourtant, il reste vrai que, quelle que soit la détermination choisie pour $\hat{\mathfrak{b}}_H$, l'estimateur privilégié de la combinaison estimable $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ est $\mathfrak{f}^T \hat{\mathfrak{b}}_H$; en d'autres termes, les premiers membres de (6) mettent en évidence r combinaisons estimables particulières qui constituent une base de $\mathbf{B}_+$.

Le système (6) est dit « système normal »; il faut évidemment se garder d'y vouloir introduire l'inverse de $\mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$ lorsque $r < p$ (cfr. § 3).